Teoría de Integración en la Recta

Matemáticas II (MA-1112), Univ. Simón Bolívar

Preparado, resuelto y tipeado en LaTeX por Axel Voza

El objetivo de esta guía es que el estudiante conozca todas las herramientas básicas acerca del manejo de integrales (esto es, que se conozcan algunas de sus propiedades y aplicaciones) y la aplicación de los teoremas relativos a ella.

La idea de esta guía es que el estudiante tenga un banco de ejercicios un poco más al estilo de los libros, los cuales suelen ser un poco más abstractos o complicados que los de la guías y exámenes publicados en Internet. Estos provienen, en su mayoría, de la bibliografía citada a continuación:

- **T. Apóstol**: *Calculus*. Editorial Reverté.
- **B. Demidovich**: *Ejercicios de Análisis Matemático*, Editorial Mir.
- **J. Kitchen**: *Cálculo*. Editorial MacGraw & Hill.

En medio de la guía se hace un repaso a las funciones exponenciales y logarítmicas. Aunque éstas ya fueron estudiadas en el curso MA-1111 (realmente sólo se aprendió a graficarlas y derivarlas), la mayoría de las propiedades interesantes de éstas se conocen mejor por medio de su definición como integrales.

Se advierte que esta guía debe usarse sólo cuando el lector considere que ya domina el nivel de los ejercicios del libro de texto. Finalmente, al final de cada sección se incluye una lista de problemas de "selección múltiple", tal como aparecen en algunos libros y en los exámenes de cursos semipresenciales. Tengo la firme convicción de que este tipo de preguntas debe probar a algunos lectores, que en la mayoría de los casos se empeñan en marcar la alternativa que aparenta ser la más lógica, sin insistir en hacer un esfuerzo serio por resolverlo. Espero que no sea este el caso del lector que lee estas lineas.

Se recomienda en todos los ejercicios que el estudiante maneje algunas integrales notables y, por supuesto, todas las reglas de derivación.

1 Sumatorias e Inducción

Antes de comenzar con cálculo Integral, es necesario revisar ciertos conceptos útiles sobre Sumatorias e Inducción Matemática.

1. Expresar las siguientes sumas mediante un símbolo de sumatoria:

   (a) $1 + 4 + 9 + \ldots + 169$.

   (b) $-1/2 + 2/3 - 3/4 + \ldots - 11/12$.

   (c) $a_2 + a_3 + a_5 + a_7 + a_{11} + a_{13} + a_{17} + a_{19} + a_{23} + \ldots$.

   (d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 3\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \ldots + 10\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   (e) $\cos(x + \pi) + \sec(x + \pi/2) + \cos(x + \pi/4) + \sec(x + \pi/8) + \ldots + \cos(x + \pi/256)$

(f) $1 + \sqrt[3]{a+1} + \sqrt[5]{\dfrac{a^2}{2}} + \sqrt[7]{\dfrac{a^{1/3}-1}{6}} + \sqrt[9]{\dfrac{a^4}{24}} + \sqrt[11]{\dfrac{a^{1/5}+1}{120}} + \sqrt[13]{\dfrac{a^6}{720}} + \ldots + \sqrt[21]{\dfrac{a^{10}}{10!}}$
(*Sugerencia*: la secuencia $0, 1, 0, -1, \ldots$ puede ser representada con ayuda de la función sen.)

2. Evaluar las siguientes sumatorias:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2k-3)$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7}\frac{\operatorname{sen}(k\pi/2)}{k}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}(k+1)^2$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$

(e) $\displaystyle\sum_{k=-60}^{60} k^2+k$
(*Sugerencia*: analizar la paridad de k^2 y k)

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1+2+3+\ldots+k)$
(*Sugerencia*: simplificar la suma interna).

3. El ejercicio § 2d se puede generalizar como sigue: sea $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ y $m,n\in\mathbb{N}$. Demostrar la fórmula para la *suma telescópica*:

$$\sum_{k=n}^{m}[f(k+1)-f(k)] = f(m+1)-f(n)$$

y utilizar este resultado (o esta misma idea) para evaluar las siguientes sumatorias:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{400}\left[\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right]$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+1)}$ (*Sugerencia*: $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$)

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\left[\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right]$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[3f(n+1)-5f(n)+2f(n-1)]$

(e) Para todo $k\geq 1$, supongamos cierta la desigualdad

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

Utilizarla para demostrar la cota

$$2\left(\sqrt{n+1}-1\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}\ ,$$

y dar una cota aproximada para $\displaystyle\sum_{k=2}^{169}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

4. Demostrar la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan(n+1)-\frac{\pi}{4}\ .$$

♢ *Solución*: Se puede demostrar (porque la fórmula *no* es tan elemental) que

$$\arctan\alpha \pm \arctan\beta = \arctan\left(\frac{\alpha\pm\beta}{1\mp\alpha\beta}\right)\ .$$

Notando entonces que el "1" del numerador del argumento de la arcotangente es también igual a $(k+1)-k$, y el denominador se puede factorizar como $1+k+k^2 = 1+k(k+1)$, podemos usar la fórmula anterior con $\alpha = k+1$ y $\beta = k$, por lo que tenemos:

$$\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan\left(\frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}\right) = \arctan(k+1)-\arctan k\ ,$$

y vemos que la suma en cuestión es igual a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}[\arctan(k+1)-\arctan(k)] &= \arctan 2-\arctan 1\\ &+ \arctan 3-\arctan 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ +\quad & \arctan(n)+\arctan(n-1) \\ +\quad & \arctan(n+1)-\arctan(n) \\ =\quad & \arctan(n+1)-\arctan 1 \;=\; \arctan(n+1)-\frac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

ya que es una suma telescópica. $\diamondsuit$

5. Utilizar el *principio de Inducción Matemática* para demostrar las siguientes fórmulas o proposiciones:

(a) Sumas notables:

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

ii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}=\frac{n}{n+1}$

iii. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}r^k=\begin{cases}\dfrac{r^n-1}{r-1} & , \quad 1\neq r>0\\ n & , \quad r=1\end{cases}$

iv. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}k=2^n(n-1)+1$

v. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

vi. $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$

vii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=2-\frac{n+2}{2^n}$

viii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k-1}{(k+2)!}=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{(n+2)!}$

ix. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}\operatorname{sen}\frac{x}{3^k}=\frac{1}{4}\left(3^n\operatorname{sen}\frac{x}{3^n}-\operatorname{sen}x\right)$

(b) Productos:

i. $\displaystyle\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$

ii. $\displaystyle\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$

iii. $\displaystyle\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\operatorname{sen}x}{2^n\operatorname{sen}(x/2^n)}$

iv. $\displaystyle\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)}{2n}=\frac{(2n)!}{2^n n!}$

(c) Desigualdades:

i. $2^n>5n^2+1$ para todo $n\geq 9$.

ii. $\displaystyle\left|\operatorname{sen}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\right|\leq\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}x_k\ ,\ 0\leq x_k\leq\pi.$

iii. $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\geq n^2\ \ ,\ a_k>0.$

iv. $\displaystyle\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$

v. $1+3+5+\ldots+(2n-1)<n^2+4$.

vi. $\displaystyle 1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2<\frac{n^3}{3}<1^2+2^2+\ldots+n^2$

vii. $(1+x)^n\ \geq\ 1+nx\quad,\quad x\ \geq\ 0$ (conodida como *desigualdad de Bernoulli*).

viii. Si $a_k\in\mathbf{R}$ para todo $k=1,\ldots,n$ y

$$b=\max\{a_1,\ldots,a_n\},\ \ a=\min\{a_1,\ldots,a_n\},$$

entonces $a\leq\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}\leq b$, con igualdad si y sólo $a_1=\ldots=a_n$.

(d) Divisibilidad:

i. La expresión n^3-n es siempre divisible por 3 (*Sugerencia*: la expresión $p(n)$ es *divisible* por m si para cualquier n_0, existe un $k_0\in\mathbf{N}$ tal que $p(n_0)=k_0m$; note que esto se denotaba así en Bachillerato: $p(n_0)=\dot{m}$).

ii. La expresión $2\cdot 7^n-3\cdot 5^n-5$ es divisible por 6, para todo $n\in\mathbb{N}$.

iii. La expresión $n(n^2+5)$ es divisible por 6

iv. La expresión x^n-y^n es siempre divisible por $x-y$.

(e) $\operatorname{sen}(\theta+n\pi)=(-1)^n\operatorname{sen}\theta\ \ ,\ \ \forall\ \theta\in\mathbf{R}$.

(f) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ raices}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

(g) Si $f(x) = ax+b$ y si $a \neq 1$, entonces $\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ veces}}(x) = a^n x + b\frac{a^n-1}{a-1}$.

(h) $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{2x+1}\right) = (-1)^n \frac{2^n n!}{(2x+1)^{n+1}}$.

(i) La derivada n-ésima de la función $(1+x^2)^{-1/2}$ es una fracción de la forma $\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1/2}}$, donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado n.

(j) Sean $a_k, b_k \in \mathbf{R}$. La desigualdad

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

es una variante de la conocida *desigualdad de Cauchy-Schwartz* (versión sumas finitas) y se puede demostrar de dos modos:

i. notando que $\sum_{k=1}^{n}(a_k x + b_k)^2 \geq 0, \forall\, x \in \mathbf{R}$. De aquí, desarrollar el miembro izquierdo de la desigualdad y componer un polinomio de 2do. grado en la variable x. ¿Qué debe ocurrir con su discriminante?

ii. por inducción matemática (*Sugerencia*: en cierto momento necesitará usar el hecho de que

$$(a_{n+1}b_k - a_k b_{n+1})^2 \geq 0, \forall\, k = 1, 2, \ldots, n).$$

(k) Supongamos que para cada n se tienen 3^n monedas de las cuales se sabe que todas son verdaderas excepto una que es falsa. Las monedas verdaderas pesan un gramo y la falsa dos gramos. Si se tiene una balanza para determinar cuál es la moneda falsa, demostrar que bastan n pesadas para determinarla.

(l) Demostrar que la suma de todos los números contenidos en una tabla de sumar los enteros desde 0 hasta $n-1$, es decir, una tabla de la forma indicada arriba, es igual a $n^2(n-1)$.

$+$	0	1	2	$\cdots$	$n-1$
0	0	1	2	$\cdots$	$n-1$
1	1	2	3	$\cdots$	n
2	2	3	4	$\cdots$	$n+1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$n-1$	$n-1$	n	$n+1$	$\cdots$	$2n-2$

$\diamondsuit$ *Solución*: Miraremos las resoluciones de sólo dos de esta lista, el (a.vii) y el (i).

(a.vii) Debemos probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}\ .$$

Para $n = 1$, la sumatoria solo dá el término $1/2^1 = 1/2$, mientras que el lado derecho de la igualdad se reduce a

$$2 - \frac{n+2}{2^n}\bigg|_{n=1} = 2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\ ,$$

por lo que la fórmula propuesta es cierta para $n = 1$. Supongamos ahora que existe un entero **fijo** $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{N+2}{2^N} \qquad \text{(Hip.I.)}$$

Debemos probar entonces que esto implica, para este entero N, que

$$\sum_{k=1}^{N+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{N+3}{2^{N+1}} \qquad \text{(Tesis)}$$

En efecto, basta relacionar el lado izquierdo de la Tesis con el lado izquierdo de la Hip.I. (“hipótesis inductiva”) usando propiedades de sumatorias, para poder dar por hecho la igualdad de la misma:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{N}\frac{k}{2^k}+\sum_{k=N+1}^{N+1}\frac{k}{2^k} \overset{\text{H.I.}}{=} 2-\frac{N+2}{2^N}+\frac{N+1}{2^{N+1}} \\ &= 2-\frac{2(N+2)-N-1}{2^{N+1}} = 2-\frac{2N+4-N-1}{2^{N+1}} = 2-\frac{N+3}{2^{N+1}}\ ,\end{aligned}$$

y como esto es precisamente el lado derecho de la Tesis, la cadena de igualdades desde el comienzo del cálculo hasta esta última expresión asegura que la igualdad propuesta en la Tesis es cierta. Esto termina la prueba por inducción.

(i) El enunciado se puede escribir de manera más precisa diciendo que “para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un polinomio de grado n, $P_n(x)$, para el cual es válida la fórmula

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}\right)=\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1/2}}\ .$$

Para $n=1$ debemos calcular la primera derivada de $f(x)=(1+x^2)^{-1/2}$:

$$\frac{d}{dx}\left((1+x^2)^{-1/2}\right)=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2-1}(2x)=\frac{-x}{(1+x^2)^{1+1/2}}\ ,$$

y como $p_1(x)=-x$ es de primer grado, la afirmación propuesta es válida para $n=1$. Suongamos entonces que para cierto $N\in\mathbb{N}$ existe un polinomio, $P_N(x)$, tal que

$$\frac{d^N}{dx^N}\left(\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}\right)=\frac{P_N(x)}{(1+x^2)^{N+1/2}} \qquad \text{(Hip.I.)}$$

Debemos hallar otro polinomio, llamémoslo $Q_{N+1}(x)$, que sea de grado $N+1$ y tal que

$$\frac{d^{N+1}}{dx^{N+1}}\left(\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}\right)=\frac{Q_{N+1}(x)}{(1+x^2)^{N+3/2}} \qquad \text{(Tesis)}$$

Nuevamente, manipular el lado izquierdo de la Tesis y relacionarlo con el lado izquierdo de la Hip.I. es la manera más eficiente de probar lo que nos proponemos. En este caso, la clave está en recordar la definición recursiva de derivadas n-ésimas, vista en MA-1111; aunque son ciertas la igualdades $(f'(x))^{(N)}=f^{(N+1)}(x)=\left(f^{(N)}(x)\right)'$, la primera de ellas **no** nos sirve, ya que no tenemos por Hip.I. la derivada n-ésima de $f'(x)=-x/(1+x^2)^{3/2}$, mientras que la segunda igualdad **si es** aplicable. En efecto:

$$\begin{aligned}\frac{d^{N+1}}{dx^{N+1}}\left(\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}\right) &= \left[\frac{d^N}{dx^N}\left(\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}\right)\right]' \overset{\text{H.I.}}{=} \left[\frac{P_N(x)}{(1+x^2)^{N+1/2}}\right]' \\ &= \frac{P_N'(x)(1+x^2)^{N+\frac{1}{2}}-(N+\frac{1}{2})P_N(x)(2x)(1+x^2)^{N-\frac{1}{2}}}{(1+x^2)^{2N+1}} \\ &= \frac{(1+x^2)P_N'(x)-(2N+1)xP_N(x)}{(1+x^2)^{N+1+1/2}}\end{aligned}$$

última igualdad que el lector hará bien en chequear ejercitando un poco de álgebra de cocientes y leyes de exponentes. Ahora bien, $P_N'(x)$ es de grado $N-1$ (“cultura general” con la que el lector cuenta de MA-1111), pero el polinomio cuadrático $1+x^2$ que lo multiplica convierte a $(1+x^2)P_N'(x)$ en un polinomio de grado $N+1$. De la misma manera, $(2N+1)xP_N(x)$ es también un polinomio, y de grado $N+1$. Como la resta de dos polinomios conserva el grado, este razonamiento nos invita a *definir* a:

$$Q_{N+1}(x):=(1+x^2)P_N'(x)-(2N+1)xP_N(x)\ ,$$

y sustituyendo esto arriba, hemos comprobado lo que la Tesis nos pedía: la derivada $(N+1)$-ésima de $f(x)$ es un cociente de la forma

$$\frac{d^{N+1}}{dx^{N+1}}\left(\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}\right)=\frac{Q_{N+1}(x)}{(1+x^2)^{N+3/2}}\ ,$$

lo cual termina la prueba. Hay que notar que no sólo en las pruebas por inducción, sino en todo enunciado existencial, es decir, donde la conclusión contenga la frase “existe un...”, requiere de un poco de inventiva en algún punto de la prueba, en el sentido que hay que **construir** lo que en el enunciado dice que debe **existir**. Y una última cosa: con práctica, una prueba por inducción sale más corta que las que acabamos de poner como ejemplo. La extensión (en el texto, principalmente) de estos ejercicios fué sólo debida a que hubiese claridad para el lector.

♢

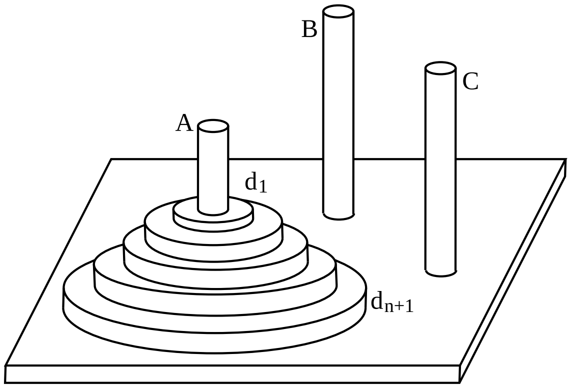


Fig. 1. Esquema de las Torres de Hanoi del ejercicio §6.

6. *Las torres de Hanoi*: en un tablero hay 3 estacas clavadas. En una de ellas se encuentra una pila de discos de tamaño graduado, como se indica en la Figura 1, con el más pequeño arriba. El objetivo de este acertijo es trasladar la pila a otra de las restantes estacas moviendo los discos de uno en uno, y de una estaca a otra cualquiera, de modo que nunca se coloque un disco encima de otro menor. Demostrar que, para n discos, este juego se puede completar en $2^n - 1$ movimientos (*Sugerencia*: denote con A, B y C las estacas y use la siguiente notación: sean d_i , $i = 1, \ldots, n$ los discos y denote por medio de $\{ d_1, \ldots, d_n \} \subset A$ cuando hayan n discos en la estaca A; la hipótesis dice que d_i esta encima de d_j si y sólo si $i < j$; aplique luego la hipótesis de inducción sobre $\{ d_1, \ldots, d_{n+1} \} \subset A$, etc.).

7. Analizar la veracidad de la siguiente demostración por inducción:

   "**Proposición:** Para todo entero positivo, se tiene que

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} .$$

   Demostración: Para $n = 1$, tenemos $1/(1.2) = 1/2 = 3/2 - 1/(1)$. Suponiendo válido el resultado para $N \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(N-1)N} + \frac{1}{N(N+1)} &\overset{\text{H.I.}}{=} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{N(N+1)} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{N} + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} \text{''} \end{aligned}$$

   Al parecer, existe algún error en esta demostración, ya que para $n = 6$, el miembro izquierdo de la ecuación dá $5/6$, mientras el derecho resulta igual a $4/3$. Hallar este error.

2 La Integral de Riemann

Ahora si podemos emprender el estudio del área y sus relaciones con la integral.

8. A continuación, se dá una función $f : I \longmapsto \mathbb{R}$. Determinar cuál de ellas es integrable sobre I.

   (a) $f(x) = x^2$, $I = [0, \infty)$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $I = [1, 2]$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $I = [-1, 1]$

   (d) $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $I = [0, a/\sqrt{2}]$

   (e) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \ x \in \mathbb{I} \end{cases}$, $I = [a, b]$

   (f) $f(x) = [\![x]\!]$, $I = [n, n+3]$, $n \in \mathbb{N}$

9. Sea f una función tal que $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ existe. ¿Se deduce de esto que f es integrable en $[a, b]$? (*Sugerencia*: invente una función parecida a la del ejercicio § 8e).

10. Sea f una función integrable en $[a, b]$ tal que su rango es el intervalo $[A, B]$, y sea g continua en $[A, B]$. Demostrar que la función $g \circ f$ es integrable en $[a, b]$ (*Sugerencia*: construya una partición apropiada con la ayuda de f).

11. Supongamos que $f(x) = 0$, $\forall\ x \in [a, b]$, salvo en un número finito de excepciones (si Ud. lo desea, puede asignarle el valor $f(x) = 1$ para los x excepcionales, pero este valor no tiene mucha importancia). Demostrar que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

12. A continuación se hacen ciertas preguntas sobre una función f con la característica de que es continua en $[a,b]$ y además $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Si la afirmación es correcta, justificarla; si no, dar un ejemplo que la contradiga:
   (a) ¿Se deduce necesariamente que $f(x) = 0\ , \forall\ x \in [a,b]$?
   (b) ¿Se deduce necesariamente que $\exists\ x \in [a,b] :\ f(x) = 0$?
   (c) ¿Se deduce necesariamente que $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\right| = 0$?
   (d) ¿Se deduce necesariamente que $\displaystyle\int_a^b |f(x)\,dx| = 0$?

13. Este ejercicio se propone ejemplificar con un caso concreto que las funciones integrables tienen integral de valor único bajo cualquier partición que cubre por completo el área bajo la curva. Para ello, se adoptarán las siguientes nomenclaturas:

$$\begin{array}{rl} f(x) = x^2\ ,\ I = [1,3] & \text{serán la función y el intervalo de integración} \\ \pi_n = \{\ 1 = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = 3\ \} & \text{será la partición de } I \\ \sigma_n = \{\ \overline{x}_k\ :\ x_{k-1} \le \overline{x}_k \le x_k\ ,\ x_k \in \pi\ \} & \text{serán los puntos muestra de la partición} \\ I_f(\pi,\sigma) = \displaystyle\sum_{k=1}^n f(\overline{x}_k)(x_k - x_{k-1}) & \text{será la suma de Riemann a calcular.} \end{array}$$

   (a) Esta primera parte debe hacerse con una calculadora, y pretende dar una *aproximación*, **no** el valor exacto de la integral. Si
$$\pi = \{\ 1, 1.5, 2.1, 2.6, 3\ \} \text{ y } \sigma = \{\ 1, 2, 2.5, 2.7\ \}\ ,$$
   calcular $I_f(\pi,\sigma)$. Luego, agregar el punto $\overline{x} = 1.8$ a σ y a π, es decir, usar
$$\pi' = \{\ 1, 1.5, 1.8, 2.1, 2.6, 3\ \} \text{ y } \sigma' = \{\ 1, 1.5, 1.8, 2, 2.5, 2.7\ \}\ ,$$
   y calcular $I_f(\pi',\sigma')$ (nótese que hay una rectángulo más en $I_f(\pi',\sigma')$). Comparar dichos resultados.
   (b) Poner $n \in \mathbb{N}$ *fijo*, y sea
$$\pi_n = \left\{\ 1 + \frac{2}{n}, 1 + \frac{4}{n}, \ldots, 1 + \frac{2(n-1)}{n}, 3\ \right\}$$
   y $\sigma_n = \pi_n \setminus \{\ 1\ \}$ es decir, el punto muestra de cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ será el extremo derecho del intervalo. (A esta paritición se le llama *aritmética* o *equiespaciada*). Demostrar que
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} I_f(\pi_n,\sigma_n) = \int_1^3 x^2\,dx = \frac{26}{3}$$
   (nótese que los rectángulos de altura $f(\overline{x})$ y base $x_{k+1} - x_k$ son superiores. ¿Por qué?).
   (c) Repetir la pregunta anterior para
$$\pi_n = \{\ 1, 3^{1/n}, 3^{3/n}, \ldots, 3^{(n-1)/n}, 3\ \}$$
   y $\sigma_n = \pi_n \setminus \{\ 3\ \}$, es decir, los punhtos muestra son ahora los extremos izquierdos de cada intervalo. (Esta partición se llama *geométrica*; nótese que ahora los rectángulos son inferiores. ¿Por qué?).
   (d) Usemos ahora una partición mas cómoda, aunque más extraña en apariencia: repetir el ejercicio anterior con **cualquier** $\pi = \{\ x_0, x_1, \ldots, x_n\ \}$ y tomando
$$\overline{x}_k = \sqrt{\frac{x_k^2 + x_k x_{k-1} + x_{k-1}^2}{3}}$$
   La elección de estos $\overline{x}_k$ simplifica enormemente el cálculo de $I_f(\pi,\sigma)$ (*Sug.*: usar el ejercicio § 2d).
   (e) ¿Se sigue *solamente* de los tres resultados anteriores que $\displaystyle\int_1^3 x^2\,dx = \frac{26}{3}$?

14. Calcular, usando la definición de sumas de Riemann, la siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^T (v_0 + gt)\ dt$

(b) $\displaystyle\int_0^n [\![x]\!]\, dx\ ,\ n \in \mathbf{N}$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2)\, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^x (3at^2 + 2bt + c)\, dt$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx$ (*Sugerencia*: usar la identidad
$$\sum_{k=1}^n \operatorname{sen} k\alpha = \frac{\cos(\alpha/2) - \cos[(n+1/2)\alpha]}{2\operatorname{sen}(\alpha/2)}\ )$$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^1 (|x| - x^3)\, dx$
(*Sugerencia*: usando la definición formal del valor absoluto, hay **dos** sumas de Riemann por calcular.)

(g) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^2}\ ,\ 0 < a < b$
(*Sugerencia*: tomar $\overline{x}_k = \sqrt{x_k x_{k-1}}$).

(h) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}}\ ,\ 0 < a < b$
(*Sugerencia*: tomar $\overline{x}_k = \left(\dfrac{\sqrt{x_{k-1}} + \sqrt{x_k}}{2}\right)^2$)

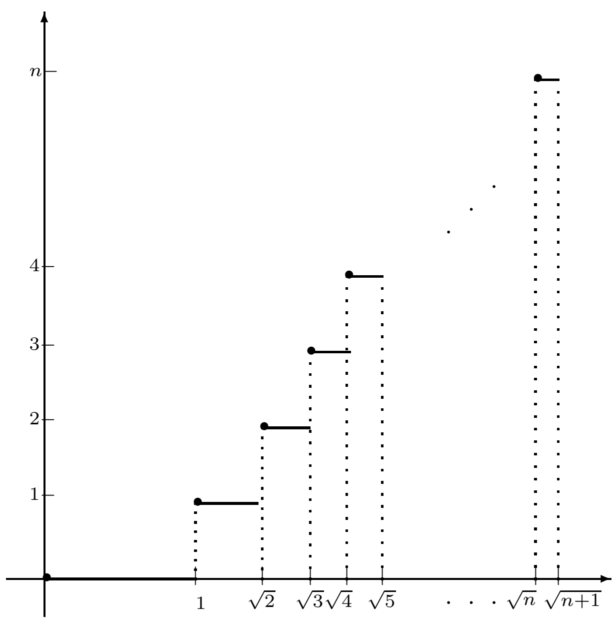
15. Demostrar (usando un buen dibujo si es necesario) las siguientes igualdades:

(a) $\displaystyle\int_1^{n^2} [\![\sqrt{x}]\!]\, dx = n^3 - \sum_{k=1}^n k^2$

(b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} [\![x^2]\!]\, dx = n\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$

♢ *Solución*:

Miremos la solución del (b). Para ello, es conveniente mirar un "bosquejo" del gráfico de $f(x) = [\![x^2]\!]$. Nótese que debido al rango de la función $\varphi(t) = \sqrt{t}$, la distancia entre puntos de la forma $\sqrt{t}$ y $\sqrt{t+1}$ es más pequeña a medida que t crece:



Como es de suponer, f es escalonada, como casi cualquier función que depende de la parte entera. Trataremos ahora de *inducir* su valor mirando la gráfica de la figura anterior. Es claro que esta integral representa una suma de rectángulos cuya altura es, para cada $k = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}$, igual al valor $f(k) = [\![(\sqrt{k})^2]\!] = [\![k]\!] = k$. El problema es que las longitudes de las bases varían en un factor **no** constante; de hecho, para cada uno de los rectángulos con estas alturas, le corresponde un valor de la base igual a $(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$. Sumando todas estas áreas, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{n}} [\![x^2]\!]\ dx &= 1 \cdot (\sqrt{2} - 1) && (1)\\
&+ 2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) && (2)\\
&+ 3 \cdot (\sqrt{4} - \sqrt{3}) && (3)\\
&+ 4 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{4}) && (4)\\
&\ \ \vdots\\
&+ (n-1) \cdot (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) && (5)
\end{aligned}$$

Ahora bien, en la línea (1) no hay nada que observar. Pero si miramos con detenimiento las siguientes, haciendo la suma parcial de cada línea con las anteriores, son claras las siguientes observaciones, las cuales se enumeran por número de línea:

(2) aparece 2 veces el factor $\sqrt{3}$ y aparecen restando 1 y $\sqrt{2}$;

(3) aparece 3 veces el factor $\sqrt{4}$ y aparecen restando 1, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$;

(4) aparece 4 veces el factor $\sqrt{5}$ y aparecen restando 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{4}$;

(5) aparece $n-1$ veces el factor $\sqrt{n}$ y aparecen restando 1, $\sqrt{2}$, … y $\sqrt{n-1}$ (?),

donde la última línea aparece con un signo de interrogación, ya que este resultado fué conjeturado "inductivamente", y este resultado, aparentemente, es igual a

$$(n-1)\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} = n\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \sqrt{k}\ .$$

Como el ejercicio resultaba una deducción a partir del gráfico de f, dejamos al lector la comprobación (por inducción completa, naturalmente) de esta fórmula. ♢

16. Calcular los siguientes límites, reconociéndolos como una suma de Riemann:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}+\ldots+\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{2}\right)$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}$

17. Se dice que una función es *periódica* si $f(x+T)=f(x)$, $\forall\ x\in\mathbf{R}$ (y el valor T es el *período* de la función). Demostrar que si f es periódica de período T, entonces

(a) $\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt=\int_a^{a+T} f(t)\,dt\ ,\ \forall\ a\in\mathbb{R}$

(b) $\displaystyle\int_0^{nT} f(t)\,dt=n\int_0^T f(t)\,dt\ ,\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

y usar estos resultados para calcular $\displaystyle\int_{\pi-1}^{201\pi-1}\operatorname{sen}x\,dx$.

18. Sea f continua y estrictamente creciente en el intervalo $[0,c]$. Supongamos además que $f(0)=0$, $a\in[0,c]$ y $b\in[0,f(c)]$. Demostrar la *desigualdad de Young*:

$$\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f^{-1}(y)\ dy\ge ab\ ,$$

es decir, el área debajo del gráfico de f más el área a la izquierda del gráfico de f^{-1} es no menor que el área del rectángulo $[0,a]\times[0,b]$ (nótese que esta suma de integrales agrega al área del rectángulo, el área de cierto triángulo curvilíneo en la figura 2). ¿Cúando ocurre la igualdad?

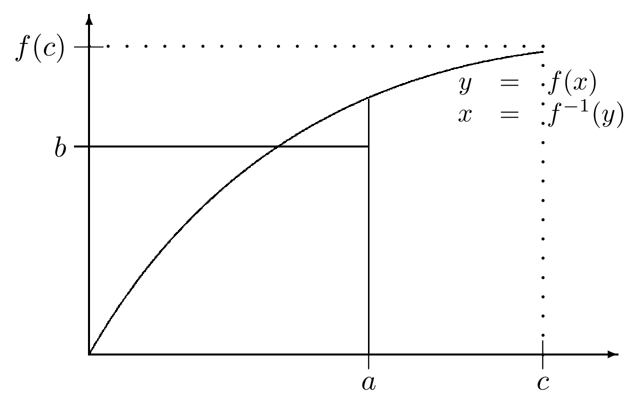


Fig. 2 Gráfico del ejercicio §18.

19. Sean f y g dos funciones integrables en $[-a,a]$, tales que f es par y g es impar. Comprobar los resultados

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx\qquad,\qquad\int_{-a}^{a} g(x)\,dx=0$$

20. Con miras a desarrollar otras interesantes propiedades de la integral como las de la pregunta anterior, a continuación se dan una serie de resultados de este tipo, las cuales hay que demostrar, suponiendo claro esta, que f es integrable en el intervalo de integración. Luego, usar dicha propiedad para calcular la(s) integral(es) dada(s) en cada una (conviene mucho que se usen las propiedades en cada integral, porque algunas **no** se pueden calcular con las pocas herramientas que tenemos hasta ahora):

(a) $\displaystyle\int_0^a x^3f(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2}xf(x)\,dx$; usarla para calcular $\displaystyle I_1=\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}}$ y $\displaystyle I_2=\int_0^{\sqrt{\pi}}x^3\operatorname{sen}x^2\,dx$ (*Sugerencia*: para I_2, derive $\operatorname{sen}t-t\cos t$).

(b) $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$; usarla para calcular $\displaystyle I_1=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}^3x}{\operatorname{sen}^3x+\cos^3x}\,dx$ y $\displaystyle I_2=\int_0^{\pi}\frac{x\operatorname{sen}x\,dx}{1+\cos^2x}$.

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi}xf(\operatorname{sen}x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\operatorname{sen}x)\,dx$; usarla para calcular $\displaystyle I=\int_0^{\pi}\frac{x\operatorname{sen}x}{1+\cos^2x}\,dx$.

(d) $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m$; usarla para calcular $I = \displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)^{98}\,dx$.

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$; usarla para calcular $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx$ y $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$ (*Sugerencia*: la fórmula inicial dice que $I = J$, y además, calcule el valor de $I + J$).

21. Usar el T.F.C. para calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_1^{a^{12}} \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_2^{4\sqrt{2}} \frac{\sqrt[5]{1 - 2x + x^2}}{1 - x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{4 + x^4}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1 + x - x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x}{x - \sqrt{x^2 - 1}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(2 + \frac{x}{2x^2+1}\right)\frac{dx}{2x^2+1}$

(h) $\displaystyle\int_2^5 \frac{2x - 1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 - x}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$

(k) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \operatorname{sen}^2 x}\,dx$

(l) $\displaystyle\int_0^{a\pi/4} \cos\frac{x}{a}\operatorname{sen}\frac{x}{a}\,dx$

(m) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\csc x - \operatorname{sen} x}$

(n) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{2x - \sqrt{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(o) $\displaystyle\int_{1/3}^{1/\sqrt{3}} \frac{\arctan 3x + x\sqrt{1+9x^2}}{1+9x^2}\,dx$

(p) Si $f(x) = \dfrac{x-5}{\sqrt{x+1}}$, hallar $\displaystyle\int_2^3 \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\,dx$. (*Sugerencia*: no es buena idea sustituir la fórmula explícita de f en la integral!)

(q) Hallar $\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)\,dx$, sabiendo que

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , \quad |x| \le 1 \\ 1 - |x| & , \quad |x| > 1 \end{cases}$$

(r) Demostrar que $\displaystyle\int_0^x (t + |t|)^2\,dt = \frac{2x^2}{3}(x + |x|)$.

22. Demostrar, usando la propiedad de acotamiento, las siguientes cotas:

(a) $\displaystyle\frac{2}{9} \le \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3+8} \le \frac{2}{7}$

(b) $\displaystyle 3 \le \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx \le 5$

(c) $\displaystyle \pi \le \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (1 + \operatorname{sen}^2 x)\,dx \le 2\pi$

(d) $\displaystyle 2 \le \int_0^1 \sqrt{x^2+4}\,dx \le \sqrt{5}$

(e) $\displaystyle\frac{1}{2} \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

(f) $\displaystyle\frac{2\pi}{13} \le \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10 + 3\cos x} \le \frac{2\pi}{7}$

$\diamondsuit$ *Solución*: Resolvamos el (e). Para $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, necesitamos hallar $m = \{\ \min(f(x)) \mid x \in [\pi/4, \pi/2]\}$ y $M = \{\ \max(f(x)) \mid x \in [\pi/4, \pi/2]\}$. Para ello, calcularemos su derivada (ya que no resulta nada obvio hallar "a ojo" los máximos o mínimos del cociente de dos funciones crecientes):

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}\,(x - \tan x)\ ,$$

y resulta claro entonces que, por ser $\cos x$ y x^2 positivos en el intervalo que nos interesa, el signo de f' depende solo del paréntesis $x - \tan x$. Si el lector traza con cuidado tanto $\tan x$ como x en un mismo plano de coordenadas, se dará cuenta que la tangente es mayor que la bisectriz en $x \in [\pi/4, \pi/2)$ (en $x = \pi/2$ dejamos abierto solo por precaución; realmente esto no molesta, ya que f' existe en su forma no factorizada en ese extremo), de modo que $f'(x) < 0$ para el intervalo $x \in [\pi/4, \pi/2]$. Así, f es decreciente, y por lo tanto

$$\begin{aligned} M &= f(\pi/4) = \frac{\operatorname{sen}(\pi/4)}{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}/2}{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\ , \text{ y} \\ m &= f(\pi/2) = \frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\ . \end{aligned}$$

Aplicando ahora la propiedad de acotamiento para integrales, tenemos

$$\begin{aligned} & m \leq f(x) \leq M \\ \Longrightarrow\quad & \frac{2}{\pi} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \\ \Longrightarrow\quad & \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ \Longrightarrow\quad & \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

la cual es la solución pedida. Es de hacer notar que usar la técnica de la derivada podría considerarse el ultimo recurso, ya que lo engorroso que puede llegar a ser una derivada y la identificación de su signo **no es mejor** que recordar desigualdades notables como

$$-1 \leq \cos x \leq 1\ , \quad \text{o también} \quad 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1\ ,$$

y otras igualmente sencillas que son fácilmente identificables a ojo, si el ejercicio lo permite, claro está. ♢

23. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

(a) $I(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \operatorname{sen} u\, du$

(b) $I(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{\tan^2 x} \sqrt{t}\operatorname{sen} t\ dt$

(c) $\displaystyle\int_0^y \operatorname{sen} t\ dt + \int_0^x \cos t\ dt - \int_x^y\ dt = xy$
(*Sugerencia*: hay que hallar y' por derivación implícita).

(d) $I(x) = \displaystyle\int_0^{\int_0^x \frac{dt}{\operatorname{arcsen} t}} \frac{du}{1+\operatorname{sen}^2 u}$

(e) $I(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} x\cos t\ dt$
(*Sugerencia*: la x dentro de la integral estorba!)

(f) Si f es una función continua tal que $f(7) = 3$ y $f(8) = 1$, evaluar $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_{x+5}^{x^3} f(t)\ dt\right)\Bigg|_{x=2}$.

24. Si $x \in [0, \pi/2]$ demostrar que

$$\int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arcsen}\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}$$

(*Sugerencia*: llame $f(x)$ a la suma de las integrales y observe con cuidado $f'(x)$; deduzca que f es constante y evalúe $f(\pi/4)$).

25. Hallar una función $f(x)$ continua y no idénticamente cero que satisfaga la fórmula

$$f^2(x) = \int_0^x f(t)\frac{\cos t}{1+\operatorname{sen}^2 t}\ dt\ .$$

26. Una función f está definida $\forall\, x \in \mathbf{R}$ por medio de la fórmula

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1+\operatorname{sen} t}{2+t^2}\, dt\ .$$

Sin calcular la integral, hallar un polinomio cuadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ y $p''(0) = f''(0)$.

27. Sea $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$.

    (a) Sin calcular la integral (ya que dicha integral no se puede resolver en términos de funciones elementales), demostrar que f es estrictamente creciente en $[0,\infty)$.

    (b) Sea g la inversa de f, que existe por la parte anterior. Demostrar que g'' es proporcional a g^2, es decir, $g''(x) = kg^2(x)$. Hallar esta constante de proporcionalidad.

28. Sea f una función estrictamente positiva y continua. Demostrar que la función ϕ definida como

$$\phi(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x tf(t)\ dt}{\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad ; \quad \phi(0) = 0$$

es continua en $x = 0$ y es creciente para $x > 0$.

♢ *Solución*: La regla de L'Hôpital nos asegura la continuidad en 0. Además, resulta que

$$\phi'(x) = \frac{xf(x)\int_0^x f(t)\,dt - f(x)\int_0^x tf(t)\,dt}{\left(\int_0^x f(t)\ dt\right)^2} = \frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)\ dt}{\left(\int_0^x f(t)\ dt\right)^2}\ .$$

Como $0 \le t \le x$, la expresión $(x-t)f(t)$ es positiva, por lo que su integral en dicho intervalo también lo es, y por ende, el numerador de $\phi'(x)$. Como el denominador es cuadrático, su signo es irrelevante, y queda por invocar el criterio de la 1ra. derivada, para concluir que $\phi(x)$ es creciente para $x > 0$. ♢

29. Sea f una función positiva y continua en $[0,\infty)$, tal que posee una asíntota horizontal en $y = A \neq 0$ y $f(0) = B$. Hallar los límites

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt$$

(*Sugerencia*: para el segundo límite, haga un gráfico de f y convénzase de que esta gráfica tiene área infinita.

30. En los siguientes casos, hallar una función f y un valor de la constante c tales que

    (a) $\displaystyle\int_c^x f(t)\,dt = \cos x - \frac{1}{2}$

    (b) $\displaystyle\int_c^{x^2} f(t)\,dt = x^6 + 9$

    (c) $\displaystyle\int_c^x tf(t)\,dt = \operatorname{sen} x - x\cos x - \frac{1}{2}x^2$

    (d) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \int_x^1 t^2 f(t)\,dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c$

31. Sabiendo que f es integrable en todo $\mathbf{R}$, hallar $f(2)$ si f satisface

    (a) $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt = x^2(1+x)$

    (b) $\displaystyle\int_0^{f(x)} t^2\ dt = x^2(1+x)$

    (c) $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\ dt = x^2(1+x)$

    (d) $\displaystyle\int_0^{x^2(1+x)} f(t)\ dt = x$

32. Sea g continua en $\mathbf{R}$, tal que $\displaystyle\int_0^1 g(t)\ dt = 2$ y $g(1) = 5$. Si definimos

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{2}(x-t)^2 g(t)\ dt \quad ,$$

demostrar que

$$f'(x) = \int_0^x (x-t)g(t)\ dt \quad ,$$

y hallar $f''(1)$ y $f'''(1)$.

33. Sea f una función integrable y cóncava hacia abajo en el intervalo $[a,b]$. Demostrar la acotación

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

34. La desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales establece que si f y g son integrables en $[a,b]$, entonces

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$$

   (a) Probarla, imitando la demostración versión sumas, dada en el ejercicio § 5(j)i.
   (b) Supuestas f y g continuas, demostrar que la igualdad se produce si y sólo si $f(x) = kg(x)$, para alguna constante k.
   (c) Mediante la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtener una estimación por exceso de la integral

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{x \operatorname{sen} x}\,dx \quad .$$

35. Algunas desigualdades importantes se pueden interpretar como consecuencia de Cauchy-Schwarz.
   (a) Si f es integrable, demostrar que vale la desigualdad

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx$$

   y la igualdad si y sólo si f es constante. (*Sugerencia*: Analizar la función $p(t) = \displaystyle\int_a^b (f(x)+t)^2\,dx$).
   (b) Con ayuda de la desigualdad anterior, hallar una estimación para el área entre el eje x y la curva $y = 1/\sqrt{1+x^2}$ en el intervalo $[0,1]$.
   (c) Sea f una función derivable en $[a,b]$, tal que $f(a) = 0$. Si $m = \min\{\ f(x) \mid x \in [a,b]\ \}$, usar la desigualdad de la parte (a) para demostrar la acotación

$$\frac{m^2}{b-a} \le \int_a^b (f'(x))^2\,dx \ .$$

36. *Teorema de Rolle para integrales*: Sea f continua en $[a,b]$, tal que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$. Demostrar que $\exists\ c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$ (el ejercicio § 12b sirvió como ilustración de la veracidad de este hecho).
   ♢ *Solución*: Definamos $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$. Es claro que F es diferenciable (por ser f continua) y también que $F(a) = F(b) = 0$, por lo que el Teorema de Rolle para funciones diferenciables (si, el mismo que Ud. vió en MA-1111) asegura que $\exists\, c \in (a,b)$ tal que $F'(c) = f(c) = 0$. ♢

37. Sea f continua en $[a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \ne 0$. Demostrar que para cualquier $k \in (0,1)$, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$k\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt \quad .$$

   ♢ *Solución*: Al aplicarle el Teorema del Valor Intermedio a la función definida como

$$F(x) = \frac{\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt}{\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt}$$

   (el lector debe verificar que esta F satisface las hipótesis de dicho teorema), tenemos que $F(a) = 0$, $F(b) = 1$, por lo que para cada $0 < k < 1$ existe $c \in [a,b]$ tal que $k = F(c)$. ♢

38. Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funciones integrables en $[a,b]$. Usar el principio de inducción para demostrar que

$$\left|\int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(x)\,dx\right| \leq \sum_{k=1}^n \int_a^b |f_k(x)|\,dx\ .$$

39. Marcar una y sólo una alternativa correcta en las siguientes preguntas:

(I) Si $x^3 + 2x^2 = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ y si f es continua, entonces $f(1) - f(-1)$ vale

a. 8 b. 4 c. 0 d. 1/8 e. 1/2

(II) $\displaystyle\int \left(\operatorname{sen} x + \frac{x^2}{2} - 3\right) dx$ es igual a

a. $-\cos x + \dfrac{x^3}{6} - 3x + C$ c. $\cos x - \dfrac{x^3}{6} + 3x$ e. $-\cos x + \dfrac{x^3}{6} - 3x$

b. $\cos x + \dfrac{x^3}{6} - 3x + C$ d. $-\cos x - \dfrac{x^3}{6} + 3x + C$

(III) Sea f acotada y continua a trozos en el intervalo $a < x < b$ y sea $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Entonces podemos asegurar que

a. G es una función continua y en todo punto x donde f es continua se cumple que $G'(x) = f(a)$.
b. G es discontinua para todo x.
c. G es una función no negativa pero continua.
d. G es una función continua y en todo punto x donde f es continua se cumple que $G'(x) = f(x)$.
e. G es una función continua y en todo punto x donde f es continua se cumple que $G'(x) = f(t)$.

(IV) Sea F una función continua definida para $a \leq x \leq b$. De las siguientes proposiciones

1. Si f es continua a trozos tal que $F'(x) = f(x)$, excepto en finitos puntos, entonces $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$;
2. Sea f acotada tal que $F'(x) = f(x)$. Entonces $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$;
3. Si $F'(x) = f(x)$ salvo en finitos puntos, entonces $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$;

son verdaderas:

a. Sólo 1. y 3. b. Sólo 2. y 3. c. Sólo 3. d. Todas. e. Ninguna.

(V) Si $f(z) = \displaystyle\int_0^z t^3\,dt$ y $g(z) = \displaystyle\int_0^1 zt\,dt$, entonces $\displaystyle\int_0^1 (f(z) + g(z))\,dz$ vale:

a. 1/2 b. 3/10 c. 1/5 d. 1/10 e. 1/20

(VI) Sean f, g funciones definidas como

$$f(x) = \sqrt{3x+2} \quad \text{para} \quad x \in [-1/3, 2/3] \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ x-1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Entonces $\displaystyle\int_{-1/3}^{2/3} (9f(x) - 18g(x))\,dx$ vale:

a. -3 b. 0 c. 7 d. 19 e. 23

(VII) Sea f continua en $[a,b]$ y sea $c \in (a,b)$. Si se tienen las integrales

$$I_1 = \int_a^b f(x)\,dx\ ,\ I_2 = \int_a^c f(x)\,dx\ ,\ I_3 = \int_c^b f(x)\,dx\ ,\ I_4 = \int_b^a f(x)\,dx\ ,$$

entonces una relación verdadera entre ellas es:

a. $I_1 = I_4$
b. $I_2 + I_3 = I_4$
c. $I_4 = I_2 + I_3 - 2I_1$
d. $I_1 + I_2 + I_3 = I_4$
e. $I_1 + I_4 = I_2 + I_3$

(VIII) Sea $f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 2 - x & , \quad x \ge 1 \end{cases}$ y sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Entonces se cumple que:

a. $F'(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad 0 \le x < 1 \\ -1 & , \quad x \ge 1 \end{cases}$

b. $F'(x) = \begin{cases} x^4/4 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 2x - x^2/2 & , \quad x \ge 1 \end{cases}$

c. $F'(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 2 - x & , \quad x \ge 1 \end{cases}$

d. $F'(2) = 8$

e. $F'(-4) = -2$

(IX) Sea $\dfrac{d}{dx}g(x) = f(x)$, con f continua. Entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ vale:

a. 0
b. $f(b) - f(a)$
c. $g(b) - g(a)$
d. $\dfrac{f(b)g(b) - f(a)g(a)}{2}$
e. $\dfrac{g^2(b) - g^2(a)}{2}$

(X) Los valores de f y g que satisfacen las relaciones $d(f+g) = 3x^2\,dx$, $d(f-g) = (2x^2-1)\,dx$ y $f(0) = g(0) = 1$ son:

a. $f(x) = 5x^2 - 1 \quad , \quad g(x) = x^2 + 1$

b. $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{x}{3} + 1 \quad , \quad g(x) = \dfrac{3x^3}{4} + \dfrac{x}{3} - 1$

c. $f(x) = \dfrac{5x^3}{6} - \dfrac{x}{2} + 1 \quad , \quad g(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x}{2} + 1$

d. $f(x) = \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{x}{2} + 1 \quad , \quad g(x) = -x^3 + \dfrac{x}{2} + 1$

e. $f(x) = 2x^3 + \dfrac{x}{2} + 1 \quad , \quad g(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x}{2} + 1$

3 Cálculo de Areas y Volumenes

Las aplicaciones de la integral definida son muy amplias, y se pueden clasificar en geométricas (áreas, volumenes), mecánicas (trabajo, fuerza) y físicas (centros de masa, centroides). En esta guía nos ocuparemos de las primeras, ya que los cursos de Física se encargarán de las demás.

Empezemos con algunas áreas.

40. A continuación, se da una región $A \subset \mathbf{R}^2$ limitada por ciertas curvas. Por razones de espacio, el enunciado se ha recortado contextualmente, y debería leerse así: "A es la región de los puntos (x,y) en el plano tal que sus curvas fronterizas son...". Hallar el área de A:

(a) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} y & = & 4x - x^2 \\ y & = & 0 \end{array} \right\}$

(b) $A = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{rcl} y & = & x^3 \\ y & = & 8 \\ x & = & 0 \end{array} \right\}$

(c) $A = \left\{ (x,y) \left| \begin{array}{rcl} y &=& x(x-1)(x-2) \\ y &=& 0 \end{array} \right. \right\}$

(d) $A = \left\{ (x,y) \left| \begin{array}{rcl} y &=& x^2+2x \\ 3y &=& 10-x \\ x &=& 2y \end{array} \right. \right\}$

(e) $A = \left\{ (x,y) \left| \begin{array}{rcl} y &=& x^2+8 \\ y &=& (x-4)^2 \\ y &=& x-2 \\ x &=& 0 \end{array} \right. \right\}$

(f) $A = \left\{ (x,y) \left| \begin{array}{rcl} y &=& \operatorname{sen} x \\ y &=& \operatorname{sen} 2x \\ x &=& 0 \\ x &=& \pi \end{array} \right. \right\}$

(g) $A = \left\{ (x,y) \left| \begin{array}{rcl} y &=& x^3 \\ y &=& x+\operatorname{sen} \pi x \end{array} \right. \right\}$

(h) $A = \left\{ (x,y) \left| \begin{array}{rcl} 3y &=& 3x-x^2 \\ x &=& 2y \end{array} \right. \right\}$

(i) $A = \left\{ (x,y) \left| \begin{array}{rcl} y &=& x^2-3x \\ y &=& x^3-3x^2 \end{array} \right. \right\}$

(j) $A = \left\{ (x,y) \left| \begin{array}{rcl} y &=& \operatorname{sen}(x/2) \\ y &=& \cos x \\ x &=& 0 \\ x &=& \pi \end{array} \right. \right\}$

(k) $A = \left\{ (x,y) \left| \begin{array}{rcl} 144 &=& 9x^2+16y^2 \\ x &>& 2 \end{array} \right. \right\}$

(l) $A = \left\{ (x,y) \left| \begin{array}{rcl} y &=& 4-x^2 \\ y &=& x^2 \\ y &<& 2-x \end{array} \right. \right\}$

(m) $A = \left\{ (x,y) \left| \begin{array}{rcl} y &=& \dfrac{1}{1+x^2} \\ y &=& x^2/2 \end{array} \right. \right\}$

(n) $A = \left\{ (x,y) \mid a^2y^2 = x^2(a^2-x^2) \right\}$

(o) $A = \left\{ (x,y) \left| \begin{array}{rcl} y &=& (x+1)^2 \\ x &=& \operatorname{sen} \pi y \\ y &=& 0 \\ y &=& 1 \end{array} \right. \right\}$

(p) $A = \left\{ (x,y) \left| \begin{array}{rcl} x &=& y^3-y \\ x &=& y-y^2 \end{array} \right. \right\}$

41. El área limitada por la curva $y = x^2$ y por la recta $y = 4$ está dividida en dos porciones iguales por la recta $y = c$. Determinar el valor de c.

42. Si en la figura 3 la función que describe la curva h es la semisuma de f y g, calcular el área de la zona acotada por estas tres funciones y exterior a la circunferencia dada en términos de a, b y las integrales de f y g solamente (*Sugerencia*: no es necesario calcular el área de la circunferencia en términos de integrales, ya que se puede usar la fórmula $A = \pi r^2$).

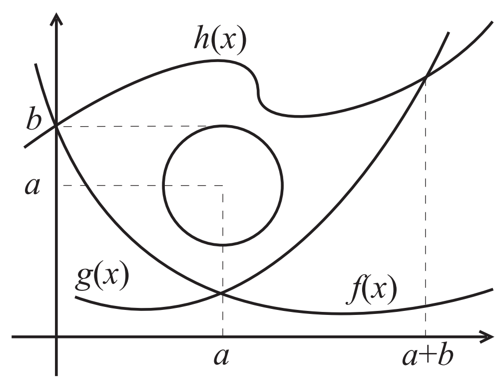


Fig. 3. Gráfico del ejercicio §42

43. Resolver las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen} x + \cos x|\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (|1+x| - |1-x|)\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\sqrt[3]{\pi}}^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 \operatorname{sen} |7x^3|\, dx$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{4} |3x^2 - 27|\, dx$

44. De un círculo de radio a se corta una elipse cuyo eje mayor coincide con uno de los diámetros del círculo y cuyo eje menor es igual a $2b$. Demostrar que el área de la parte restante es igual al área de la elipse cuyos semiejes son a y $a-b$.

45. Sean $f(x) = [\![x]\!]^2$ y $g(x) = [\![x^2]\!]$. Graficar estas funciones para calcular las integrales

(a) $\displaystyle\int_{1}^{3/2} |f(x) - g(x)|\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2} |f(x) - g(x)|\, dx$

Finalmente, los ejercicios restantes se refieren al cálculo de volúmenes por los tres distintos métodos; discos, cascarones y secciones transversales (recuerde que el método de arandelas es un caso especial del método de discos).

46. A continuación se dá una superficie generada por la rotación de una región A alrededor del eje indicado (aquí se hace el mismo recorte del enunciado contextual). Hallar el volumen de dicha superficie:

   (a) $A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{rcl} y & = & 2\sqrt{x} \\ y & = & x \end{array} \right\}$, eje $y = 0$.

   (b) $A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{rcl} x & = & y^2 \\ y & = & x - 2 \end{array} \right\}$, eje $x = 0$.

   (c) $A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{rcl} y & = & 4x^2 \\ y & = & 8 - 4x \end{array} \right\}$, eje $x = 1$.

   (d) $A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, 1 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \right\}$, eje $x = 0$.

   (e) $A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{rcl} 16y & = & 3x^2 + 48 \\ 16y & = & x^2 + 80 \end{array} \right\}$, eje $y = 2$.

   (f) $A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{rcl} y & = & x^2 + 2 \\ 2y & = & x + 2 \\ x & = & 0 \\ x & = & 1 \end{array} \right\}$, eje $y = 0$.

   (g) $A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{rcl} y & = & x^2 + 2 \\ 2y & = & x + 2 \\ x & = & 0 \\ x & = & 1 \end{array} \right\}$, eje $x = 0$.

   (h) $A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \\ y & = & 0 \\ x & = & 0 \\ x & = & \pi/2 \end{array} \right\}$, eje $x = 0$.

47. En la figura 4 se muestra la región comprendida entre las gráficas de la función $f(x)$ y $y = (x-a)^2$. *Escribir* (es decir, dejando las cuentas indicadas) las integrales que calculan el volúmen del sólido generado cuando se rota la región;

   (a) respecto a la recta $x = 95$, y

   (b) respecto a la recta $y = -5$.

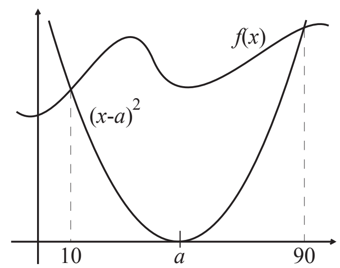


Fig. 4. Gráfico del ejercicio §47

48. Un sólido se genera haciendo rotar la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $0 \le x \le 1$ alrededor del eje x. Determinar f, sabiendo que dicho volumen vale $a^2 + a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

49. El *toroide* se genera de la siguiente forma: se rota una circunferencia de radio a alrededor de un eje que está a una distancia b del centro de la circunferencia, con $b > a$. Hallar el volumen del toroide (*Sugerencia*: la integral $\displaystyle\int_0^k \sqrt{k^2 - x^2}\, dx$ –que ya ha aparecido antes– se puede interpretar como un área notable).

50. Una esfera de radio a es atravesada por un cilindro de radio b ($b < a$), de modo que un diámetro de la esfera y el eje de simetría del cilindro coincidan. Hallar el volumen del sólido obtenido.

51. Un bloque cilíndrico de radio R se corta mediante dos planos que pasan por el centro del cilindro. El primero es perpendicular al eje, y el segundo forma ángulo, de modo que la máxima altura que se forma con el borde del cilindro vale H, como se muestra en la figura 5. Calcular el volumen de la cuña así formada.

52. Deducir la fórmula para el volumen de una pirámide de base cuadrada, de arista b y altura h.

53. Repetir la pregunta anterior para un elipsoide de semiejes a, b y c.

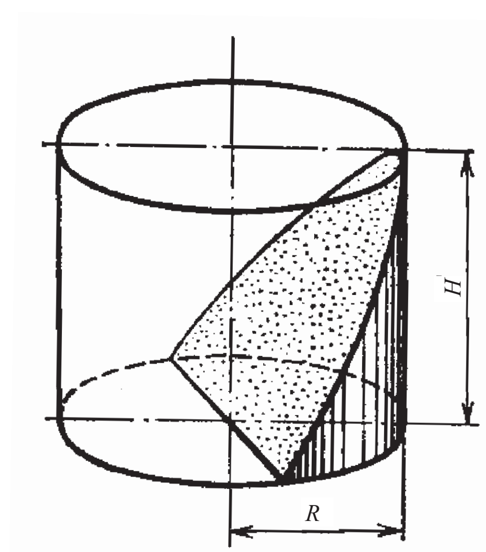


Fig. 5. Gráfico del ejercicio §51.

54. La base de un sólido regular está limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Las secciones transversales del mismo, perpendiculares al eje y, son triángulos, cuya hipotenusa está contenida en el plano xy. Hallar el volumen del sólido resultante.

55. La sección recta de cierto sólido por un plano perpendicular al eje x es un círculo de diámetro AB. El punto A está sobre la curva $y^2 = 4x$ y el B sobre la curva $x^2 = 4y$. Hallar el volumen de este sólido.

56. Dos cilindros inclinados tienen la misma altura H, la base superior común de radio R y sus base inferiores (del mismo radio) se tocan, tal como se muestra en la figura 6. Calcular el volumen de la parte común de los cilindros.

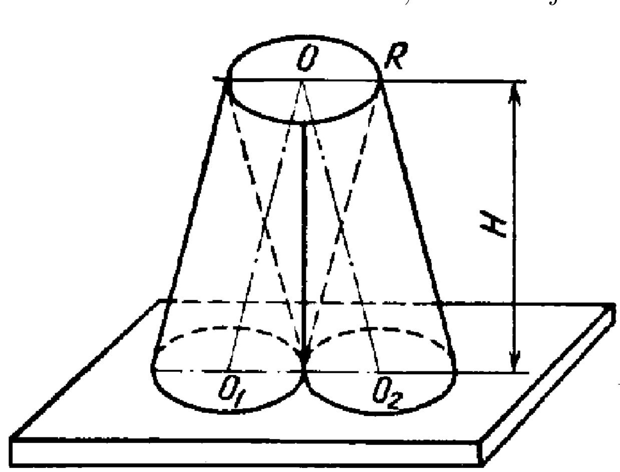


Fig. 6. Gráfico del ejercicio §56

57. Marcar una y sólo una de las alternativas dadas en cada una de las siguientes preguntas:

(I) Al calcular el área de la figura limitada por la curva $y^2 = 2x + 1$ y la recta $x - y = 1$, se obtiene:

a. 1 b. 2 c. 10/3 d. 9/2 e. 16/3

(II) La recta $x = h$ divide en dos partes iguales al área encerrada por la curva $y = x^2$ para $x \geq 0$, el eje x y la recta $x = 2^{1/3}$. Entonces el valor de h es:

a. $2^{1/3} - 1$ b. $2^{-1/3}$ c. 1 d. $2^{2/3} - 1$ e. $2^{-2/3}$

(III) El área limitada por $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$ se hace girar en torno al eje x. El volumen del sólido así generado es:

a. 2π b. $3\pi/2$ c. π d. $\pi/2$ e. $\pi/4$

(IV) El volumen del sólido generado al rotar alrededor del eje x el área que queda encerrada en el primer cuadrante por los ejes coordenados y la curva $y^2 + 6x = 36$ es:

a. 27π b. 54π c. 72π d. 108π e. 216π

4 Repaso de Logaritmos y Algebra de Exponentes

En éste capítulo trataremos de concentrarnos en una de las operaciones más útiles de la Matemática. Ésta nos permitiría definir objetos un tanto extraños como $2^{\sqrt{3}}$ ó $\sqrt[\pi]{5}$. Comencemos con algunos ejercicios de calentamiento, en los que se espera que el lector recuerde lo que vió en Bachillerato acerca de leyes de exponenciales y de logaritmos.

58. Expresar cada una de las siguientes igualdades exponenciales en forma logarítmica o viceversa:

(a) $5^3 = 125$ (c) $10^{-2} = 0.01$ (e) $\log 0.001 = -3$ (g) $\log_3(1/81) = -4$
(b) $(1/3)^2 = 1/9$ (d) $\sqrt[3]{27} = 3$ (f) $\log_{1/3} 9 = -2$ (h) $\log_{64} 8 = 1/2$

59. Determinar el valor de x en cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $\log_3 81 = x$ (d) $\log_9 x = -1/2$ (g) $\log_{x^2} x^{2x} = -\sqrt{2}$ (j) $\log_{x^2} x + \log_{x^2} 2 = 0$
(b) $\log_a a^{-4} = x$ (e) $\log_x 27 = 3/2$ (h) $\log_8 x^2 = \log_{64} 16$ (k) $\log_{x^2} x + \log_x x^2 = x$
(c) $\log_{b^2} b^6 = x$ (f) $\log_x 5 = -2$ (i) $x^{\log_x 2} = x$ (l) $\log_{x^a} x + \log_x x^a = \sqrt[a]{x}$

60. Demostrar cada una de las siguientes identidades:

(a) $\log_{1/a} x = -\log_a x$
(b) $\log_{\sqrt{a}} x = 2\log_a x$
(c) $\log_{a^r} x = \dfrac{1}{r}\log_a x$
(d) $\log_{a^n} x^m = \dfrac{m}{n}\log_a x$
(e) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$
(f) $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$
(g) $\log_a b \log_b c \log_c a = 1$
(h) $\log_a x \log_b x + \log_b x \log_c x + \log_c x \log_a x = \dfrac{\log_a x \log_b x \log_c x}{\log_{abc} x}$

61. Demostrar que $\dfrac{1-3\log_7 5}{4\log_7 5 - 2} = \dfrac{\log_5 7 - 3}{4 - 2\log_5 7}$ (*Sugerencia*: utilizar la fórmula recientemente demostrada en el ejercicio § 60e).

62. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $(\log a)^{(\log a)^{\log a^x}} = 2$
(b) $\sqrt{\log_2 x^4} + 4\log_4\sqrt{\frac{2}{x}} = 2$
(c) $\log^2 x^3 - 20\log\sqrt{x} + 1 = 0$
(d) $\sqrt{\log_2 x} + \sqrt{\log_x 2} = 5/2$
(e) $\log_{\sqrt[3]{4}}(x+1) - \log_8 2 = 1$
(f) $\log_2 x - 8\log_{x^2} 2 = 3$
(g) $\log_{\sqrt{x}} 2 + 4\log_4 x^2 + 9 = 0$
(h) $\log_x 3 \, \log_{x/3} 3 + \log_{x/81} 3 = 0$
(i) $\log_{3x}(3/x) + \log_3^2 x = 1$
(j) $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$
(k) $\sqrt[3]{a^{2x}\sqrt[3]{a^{2x}\sqrt[3]{a^{2x}}}} = a^{26}$
(l) $2\log\log x = \log\dfrac{7-2\log x}{5}$
(m) $2^{\log_x(x^2-6x+9)} = 3^{2\log_x\sqrt{x}-1}$
(n) $\log_2^2 x - 9\log_8 x = 4$
(o) $16^{\log_x 2} = 8x$
(p) $(0.4)^{\log^2 x + 1} = (6.25)^{2-\log x^3}$
(q) $\log_2(9^{x-1}+7) = 2 + \log_2(3^{x-1}+1)$

63. Determinar cuál de los siguientes pares de números es mayor:

(a) $\log_4 3$ y $\log_3 4$
(b) $\sqrt[3]{0.01}$ y $\sqrt[5]{0.001}$
(c) $(2/3)^{17/15}$ y $(9/4)^{-23/25}$
(d) $\log(\sqrt{7}+\sqrt{3})$ y $\log(\sqrt{21})$
(e) $\pi - \log_2 9$ y $1 + \log(1+\sqrt{2})$
(f) $\pi^{\sqrt{2}}$ y $\sqrt{2^\pi}$ (Problema difícil!)

64. Resolver las siguientes inecuaciones:

(a) $(5^x+1)(3^{2x}-3)(2^x-1) \le 0$
(b) $\dfrac{(1-3^x)(2^x-2)}{(2^{-x}-4)(5^x-125)} \le 0$
(c) $4^x + 2^{x+1} - 3 \ge 0$
(d) $\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right]\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^x - 1\right](2^x+2) > 0$
(e) $5^{x^2-2} - 0.04 \ge 0$
(f) $\sqrt{2^{x^2-1}-4} \le 2$
(g) $\log x^3 \le \log(7x^2-x-6) - \log(x-1)$
(h) $\log_{1/2} x + \log_3 x > 1$
(i) $x^{\log_a x + 1} > a^2 x$ (si $a > 1$)
(j) $\log_a x + \log_a(x+1) < \log_a(2x+6)$ (si $a > 1$)
(k) $\log_3(x^2-5x+6) < 0$
(l) $\dfrac{1}{\log_2 x} - \dfrac{1}{\log_2 x - 1} < 1$
(m) $x^{2-\log_2^2 x - \log_2 x^2} > \dfrac{1}{x}$
(n) El hecho de que $a^{1/3} < a^{1/2}$ implica que $a \ \boxed{\phantom{<}}\ 1$.
(o) Si $\log_2(x+2) - \log_2(x-2) > 0$, entonces

$$x \in \boxed{}.$$

65. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

(a) $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 1/2\sqrt{3} \\ (x+y)2^{y-x} = 48 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3^x 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 3 \\ \log_3 x^3 + \log_3 y^2 = 4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \log_x 27 = \log_y 216 \\ xy = 18 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512 \\ \log\sqrt{xy} = 1 + \log 2 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x^2 = 1 + 6\log_4 y \\ y^2 = y2^x + 2^{2x+1} \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 2x^y - x^{-y} &= 1 \\ \log_2 y &= \sqrt{x} \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 5\log^2 x + \log x^4 \, \log y + \log^2 y &= 2 \\ \log x \, \log y^6 + 7\log^2 y &= 1 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} 2x^y - x^{-y} &= 1 \\ \log_2 y &= \sqrt{x} \end{cases}$

5 La función Logaritmo Natural y su inversa

Prosigamos ahora con Cálculo Diferencial para estas funciones. Se define función *logaritmo natural* como

$$f(x) = \operatorname{lgn} x := \int_1^x \frac{dt}{t} \ .$$

Se define la función *exponencial natural* como la función inversa al logaritmo natural, es decir,

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x := f^{-1}(x) \ .$$

Los resultados básicos más importantes sobre estas funciones se resumen en la siguiente proposición:

Proposición 5.1. Para las funciones $\operatorname{lgn} x$ y e^x se tiene

$$\frac{d}{dx}\operatorname{lgn} x = \frac{1}{x} \ , \quad \frac{d}{dx}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \ ,$$

y estas funciones están relacionadas por las ecuaciones

$$\operatorname{lgn}(\mathrm{e}^x) = x \ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \ ; \quad \mathrm{e}^{\operatorname{lgn} x} = x \ , \quad \forall\, x > 0 \ .$$

Además, $f(x) = \operatorname{lgn} x$ y $f^{-1}(x) = \mathrm{e}^x$ son funciones crecientes en sus dominios, y los siguientes límites se verifican:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{lgn} x = -\infty \ , \quad \lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0^+ \ .$$

66. Hallar los dominios de definición de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \operatorname{lgn}(x^2 + 5x + 6)$

(b) $f(x) = \operatorname{arcsen}(1 - x) + \operatorname{lgn}(\operatorname{lgn} x)$

(c) $f(x) = \operatorname{lgn}(1 - 2\cos x)$

(d) $f(x) = \operatorname{lgn}(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(e) $f(x) = \operatorname{lgn}\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|$

(f) $f(x) = \sqrt[4]{\operatorname{lgn}(\tan x)}$

(g) $f(x) = \log_2(\log_3(\log_4 x))$

(h) $f(x) = \arccos(\log(x/10))$

(i) Si se define la función $f(x) = \dfrac{\log_x 2 - 1}{1 - \log_3 x}$, entonces la solución de la ecuación $f(x) = 0$ es $x = \boxed{}$, y el dominio de la función es $\mathbb{R}^+ \setminus \{ \boxed{}, \boxed{} \}$.

(j) Sean $f_1(x) = \operatorname{lgn}(x^2 - 4)$ y $f_2(x) = \operatorname{lgn}(x - 2) + \operatorname{lgn}(x + 2)$. Aunque es cierto que $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, ¿son iguales los dominios de f_1 y f_2 ?

67. Usando gráficas notables, dibujar el grafo de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \operatorname{lgn}(|\, x \,| + 1)$

(b) $f(x) = \operatorname{lgn}(\sqrt[3]{x}) + 1$

(c) $f(x) = |\operatorname{lgn} x| + \operatorname{lgn} x$

(d) $f(x) = \log(\cos x)$

(e) $f(x) = \mathrm{e}^{x-2} - 2$

(f) $f(x) = \mathrm{e}^{1-|x|}$

(g) $f(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$

(h) $f(x) = 3^x 2^{-x}$

68. La *campana de Gauss* es una curva notable (mostrada en la figura 7) utilizada en la teoría de Distribución de Probabilidades, cuya ecuación es $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Obsérvese que esta función es par, que tiene al eje x como asíntota horizontal y a $f(0)$ como máximo global. Usar esta información para graficar las funciones $f_1(x) = (\mathrm{e}^x)^{2-x}$, $f_2(x) = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ y $f_3(x) = 1 + \mathrm{e}^{4-x^2}$.

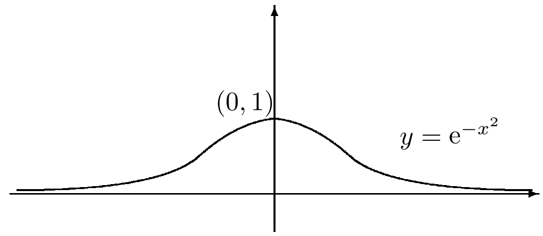


Fig. 7. Gráfico del ejercicio §68.

69. Este ejercicio se propone demostrar los límites notables exponenciales y logarítmicos.

    (a) Elegir $a > \mathrm{e}$ y usar el hecho de que $m \operatorname{lgn} a > m$ (con $m > 0$) para demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{lgn} x = \infty$. ¿Qué implica esto sobre $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{lgn} x$?

    (b) Se ha dicho en la definición de logaritmo en base arbitraria que esta no puede ser 1. Así, la función $f(x) = \log_x 2$ tendría una indeterminación en $x = 1$. Usar nuevamente el ejercicio § 60e para deducir que
$$\lim_{x\to 1^\pm} \log_x 2 = \pm\infty \ .$$

    (c) Usar la regla de L'Hôpital y la continuidad de la función exponencial para demostrar el siguiente límite notable
$$\lim_{h\to 0}(1+hx)^{1/h} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x \ .$$
(*Sugerencia*: la primera igualdad sale por L'Hôpital derivando respecto a h; para la segunda, basta hacer el cambio de variable $h = 1/n$).

    (d) Sea $\epsilon > 0$ e $I = (-\epsilon, \epsilon) \subset (-1, 1)$. Comprobar gráficamente la desigualdad $\operatorname{lgn}(1 + x) \le x$, $\forall\ x \in I$. Además, usando el hecho de que
$$x^2 \ge 0 \implies 1 - x^2 \le 1 \implies 1 - x \le \frac{1}{1+x} \ , \quad \forall\ x \in I \ ,$$
demostrar que $x - x^2/2 \le \operatorname{lgn}(1 + x)$, $\forall\ x \in I$.

    (e) Usando las desigualdades de la parte anterior y el Teorema de Interposición (si quiere llamarlo "del Sandwich", está bien), deducir el límite notable
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{lgn}(1+x)}{x} = 1 \ .$$
¿Que se puede afirmar con respecto al límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$? (nótese que la idea de este ejercicio es deducir dichos límites sin usar la Regla de L'Hôpital).

    (f) Usar un cambio de variable exponencial apropiado en la parte anterior y la identidad $a^x = \mathrm{e}^{x \operatorname{lgn} a}$ para deducir los límites notables
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \operatorname{lgn} a \ .$$

70. Usando cualquiera de los límites notables de la pregunta anterior (es decir, sin usar la Regla de L'Hôpital), calcular los siguientes límites (*Sugerencia*: las siguientes formas indeterminadas se pueden convertir en los límites notables de la pregunta anterior por medio de cambios de variable, ya que las funciones logarítmicas y exponenciales son continuas):

    (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x \operatorname{sen} x}{\mathrm{e}^{-x^2} - 1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x} - \mathrm{e}^{\beta x}}{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(bx)}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}(\operatorname{lgn}(x+1)) - \operatorname{sen}(\operatorname{lgn} x)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(\pi 2^x)}{\operatorname{lgn}[\cos(\pi 2^x)]}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{lgn}[\tan(ax+\pi/4)]}{\operatorname{sen}(bx)}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to \mathrm{e}}\frac{\operatorname{lgn}x-1}{x-\mathrm{e}}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4}\tan(2x)\,(\mathrm{e}^{x-\pi/4}-1)$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x\,\mathrm{e}^x)-\cos(x\,\mathrm{e}^{-x})}{x^3}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(1+\tan^2\sqrt{x}\right)^{1/2x}$

(l) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(1-x)\,\log_x 2$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}a}\right)^{1/(x-a)}$

(q) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\operatorname{sen}(1/x)+\cos(1/x))^x$

(r) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(2\,\mathrm{e}^{x/(x+1)}-1\right)^{(x^2+1)/x}$

♢ *Solución*: Vemos las resoluciones del (g) y del (p).

(g) Como $\operatorname{lgn}x-1$ se puede escribir como

$$\operatorname{lgn}x-\operatorname{lgn}\mathrm{e}=\operatorname{lgn}\left(1+\frac{x}{\mathrm{e}}-1\right)=\operatorname{lgn}\left(1+\frac{x-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right),$$

el límite pedido es igual a:

$$\lim_{x\to\mathrm{e}}\frac{\operatorname{lgn}x-1}{x-\mathrm{e}}=\lim_{x\to\mathrm{e}}\frac{\operatorname{lgn}\left(1+\dfrac{x-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right)}{\mathrm{e}\,\dfrac{x-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}}=\mathrm{e}^{-1}\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{lgn}(1+u)}{u}=\mathrm{e}^{-1}\cdot 1\ ,$$

donde se usó el cambio de variable $\dfrac{x-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=u$, el cual es continuo e invertible, y donde $x\to\mathrm{e}\implies u\to 0$. Por la pregunta § 69.e, el último límite es igual a 1, y el resultado final es por lo tanto e^{-1}.

(p) Nuevamente usaremos algunos trucos algebráicos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}a}\right)^{\frac{1}{x-a}} &= \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}a}-1\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a}{\operatorname{sen}a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\\ &= \lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a}{\operatorname{sen}a}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a}}\right]^{\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a}{x-a}}\end{aligned}$$

Ahora bien, el cambio de variable (continuo en todo $\mathbb{R}$ e invertible en $(-\pi/2,\pi/2)$) $h(x)=\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a$ cambia el límite de $x\to a$ a $h\to 0$, y pensando el límite notable del ejercicio § (69.c) con $x=1/\operatorname{sen}a=\csc a$, el límite anterior se puede escribir como

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{h(x)}{\operatorname{sen}a}\right)^{\frac{1}{h(x)}}\right]^{\frac{h(x)}{x-a}}=\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{\operatorname{sen}a}\right)^{\frac{1}{h}}\right]^{L}\ ,$$

donde $L=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}a}{x-a}$ hay que calcular adicionalmente. Pero este L se reconoce precisamente como el cociente incremental de la función $g(x)=\operatorname{sen}x$ en el punto $x=a$, por lo que $L=g'(a)=\cos a$. Como el corchete en el límite de arriba tiene la forma indeterminada del ejercicio § 69.c, su resultado es $\mathrm{e}^{\csc a}$, y juntando todo esto en la resolución de arriba, tenemos finalmente que

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=[\mathrm{e}^{\csc a}]^{\cos a}=\mathrm{e}^{\frac{\cos a}{\operatorname{sen}a}}=\mathrm{e}^{\operatorname{ctg}a}\ .$$

Hay que notar que estos límites podrían ser, como podrían **no ser** más fáciles de calcular por medio de la regla de L'ôpital. Este ejemplo en particular requiere de la toma de logaritmos a ambos miembros de la expresión

$$M=\lim_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\ ,$$

la cual no solo implica que se *presupone* la existencia del límite, sino que requiere a su vez de simplificaciones algebráicas que son más o menos equivalentes a las que acabamos de hacer "a mano" sin usar dicha regla. Así, ambos métodos son, a la larga, igualmente largos y/o complicados para resolver indeterminaciones del tipo 1^∞, los cuales no se vieron en MA-1111 por estas dos razones; carencia de la función logaritmo, y la dificultad algebráica de este tipo de forma indeterminada.

$\diamondsuit$

71. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x \operatorname{lgn}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2} \operatorname{lgn}\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$

(c) $f(x) = \operatorname{lgn} \tan(x/2) - \operatorname{ctg} x \operatorname{lgn}(1 + \operatorname{sen} x) - x$

(d) $f(x) = 2 \operatorname{lgn}\left(2x - 3\sqrt{1-4x^2}\right) - 6 \operatorname{arcsen}(2x)$

(e) $f(x) = \operatorname{lgn} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} + 2 \arctan \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(f) $f(x) = x \arctan(1+\sqrt{x}) + \operatorname{lgn}(x+2\sqrt{x}+2) - \sqrt{x}$

(g) $f(x) = \mathrm{e}^{ax} \, \dfrac{a \operatorname{sen}(bx) - b\cos(bx)}{a^2+b^2}$

(h) $f(x) = \dfrac{(\operatorname{lgn} 3) \operatorname{sen} x + \cos x}{3^x}$

(i) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{kx}}{k(k^2+4)}(k^2 \cos^2 x + k \operatorname{sen}(2x) + 2)$

(j) $f(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2^2 + 2^{-x}}$

(k) $f(x) = \operatorname{lgn} \cos \arctan \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$

(l) Si $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \operatorname{lgn}\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$, demostrar que y satisface $2y = xy' + \operatorname{lgn} y'$.

$\diamondsuit$ *Solución*: Veamos la solución del (h). Por la regla del cociente, se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{((\operatorname{lgn} 3)\cos x - \operatorname{sen} x)3^x - ((\operatorname{lgn} 3)\operatorname{sen} x + \cos x)3^x(\operatorname{lgn} 3)}{3^{2x}} \\ &= \frac{3^x\left[(\operatorname{lgn} 3)\cos x - \operatorname{sen} x - (\operatorname{lgn}^2 3)\operatorname{sen} x - (\operatorname{lgn} 3)\cos x\right]}{3^{2x}} = -(1+\operatorname{lgn}^2 3)\frac{\operatorname{sen} x}{3^x} \end{aligned}$$

Lo único relevante en este ejercicio es que se pudo haber obtenido la misma respuesta si se miraba a f como el producto $f(x) = ((\operatorname{lgn} 3)\operatorname{sen} x + \cos x)\, 3^{-x}$, teniendo claro en ambos casos la fórmula de derivación $(3^u)' = (\operatorname{lgn} 3)3^u u'$. $\diamondsuit$

72. Usar la *derivada logarítmica* $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{lgn}(f(x))) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ para calcular la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \sqrt[x]{x}$

(b) $f(x) = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$

(c) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} + (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$

(e) $f(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2} \ldots (x-a_n)^{\alpha_n}$

(f) $f(x) = \left[\dfrac{\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right]^{\arctan^2 x}$

(g) Si $f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-1.000)$, demostrar que $f'(0) = (1.000)!$

73. Demostrar que la función definida como $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} - \operatorname{lgn}(1-\mathrm{e}^{-x})$ es decreciente para $x > 0$.

74. Sabiendo que $\tan\phi = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, demostrar que

(a) $\dfrac{d\phi}{dx} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$

(b) $x = \operatorname{lgn}(\sec\phi + \tan\phi)$

(c) $\dfrac{dx}{d\phi} = \sec\phi$

75. Demostrar que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \leq 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\exp\left(-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)\right), & 0 < x < 1 \\ 1\,, & x \geq 1 \end{cases}$$

es continua y derivable en todo $\mathbf{R}$ (de hecho, esta función "conecta" por medio una curva derivable en un intervalo abierto a dos rectas horizontales con discontinuidad de salto, separadas por dicho abierto).

76. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

en $x = 0$. Representar la gráfica de f.

77. Sea $n \in \mathbf{Z}^+$. Usar el principio de Inducción Matemática para demostrar las fórmulas

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^x}(x^n \operatorname{lgn} x) &= n!\left(\operatorname{lgn} x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) , \\ \frac{d^n}{dx^x}\left(\frac{\operatorname{lgn} x}{x}\right) &= (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\left(\operatorname{lgn} x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

♢ *Solución*: Demostremos la primera, a pesar de ser la más fácil. El caso $n = 1$ es trivial, ya que $(x \operatorname{lgn} x)' = \operatorname{lgn} x + 1$, y es precisamente a 1 a lo que se reduce la sumatoria a la derecha de la identidad cuando $n = 1$. Si suponemos cierta la fórmula para el n dado y trabajamos con la fórmula en la variable $n + 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(x^{n+1} \operatorname{lgn} x\right) &= \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{d}{dx}\left(x(x^n \operatorname{lgn} x)\right)\right] = \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^n \operatorname{lgn} x) + x(nx^{n-1} \operatorname{lgn} x + x^{n-1})\right] \\ &= \frac{d^n}{dx^n}\left((n+1)x^n \operatorname{lgn} x + x^n\right) \stackrel{*}{=} (n+1)n!\left(\operatorname{lgn} x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) + n! \\ &= (n+1)!\left(\operatorname{lgn} x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) = (n+1)!\left(\operatorname{lgn} x + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right) , \end{aligned}$$

(nótese que en el primer paso tuvimos que escribir $x^{n+1} = x \cdot x^n$ y $\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} = \dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{d}{dx}$ para que más adelante apareciera la hipótesis inductiva) y en el paso (*) usamos que $(x^n)^{(n)} = n!$, como el lector podrá chequear sin dificultad. ♢

78. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Se definen los *polinomios de Hermite* por medio de la fórmula

$$H_n(x) = (-1)^n \, \mathrm{e}^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{e}^{-x^2}) .$$

Demostrar que todo H_n es un polinomio de grado n.

79. Hallar los valores de las constantes a, b y c para que la función definida como

$$\begin{cases} 3x^2 + ax - 5 & , \quad x \leq 1 \\ x + b\cos(\pi x) & , \quad 1 < x \leq 2 \\ \mathrm{e}^{c(x-2)} & , \quad x > 2 \end{cases} ,$$

sea continua en $x = 1$ y derivable en $x = 2$ (*Sugerencia*: recurde que “derivable” también significa continua de antemano!).

80. Sea $f(x) = 2 + x^2 + \operatorname{lgn}(x^2)$, $x > 0$. Demostrar que $\exists\, x_0 \in [\mathrm{e}^{-8}, 3]$ tal que $f(x_0) = 8$.

81. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \operatorname{lgn}(x^2) - x & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$, obtener $f'(0)$.

82. Sea f continua, derivable y estrictamente positiva en el intervalo $[a, b]$. Demostrar que $\exists\ c \in [a, b]$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left[(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\right] .$$

(*Sugerencia*: aplicarle el Teorema del Valor Medio a una composición; no es tan difícil ver que se puede inventar con el logaritmo y una función que estrictamente positiva).

83. A continuación se da una desigualdad que se cumple en un intervalo. Con esa desigualdad como hipótesis y una modificación del criterio de la primera derivada (el cual debió ser un ejercicio de ése tema[1]), demostrar la desigualdad implicada en cada caso:

    (a) Sabiendo que $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall\, x > 1$, entonces $\operatorname{lgn} x < 2(\sqrt{x} - 1)$, $\forall\, x > 1$.

    (b) Sabiendo que $\mathrm{e}^x \geq 1$, $\forall\, x \geq 0$, entonces $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$, $\forall\, x \geq 0$.

    (c) Sabiendo que $2 \arctan x \geq 0$, $\forall\, x \geq 0$, entonces $2x \arctan x \geq \operatorname{lgn}(1 + x^2)$, $\forall\, x \geq 0$.

    $\diamondsuit$ *Solución*: Veamos la solución del (c), que parece ser el más difícil. En efecto, si el lector ha intentado ya hacer los dos primeros, el único "truco" en la proposición que se quiere aplicar, es que la desigualdad a demostrar debe constar de las antiderivadas de los dos miembros de la desigualdad que se dá como dato. Pero ni la derivada de $\operatorname{lgn}(1 + x^2)$ es 0, ni la derivada de $2x \arctan x$ es $2 \arctan x$, por lo que debemos pensar en modificar previamente la hipótesis para que las funciones que necesitamos salgan naturalmente; si sumamos a ambos miembros de dicha hipótesis el término $\dfrac{2x}{1+x^2}$ (que"pareciera" ser x sin derivar, multiplicada por la derivada de $2 \arctan x$), tenemos:

$$2 \arctan x + \frac{2x}{1+x^2} \geq \frac{2x}{1+x^2},\ \forall\, x \geq 0\ ,$$

    de modo que **ahora si** resulta natural definir $f(x) = 2x \arctan x$ y $g(x) = \operatorname{lgn}(1+x^2)$ (habiendo notado, gracias al artificio, que

$$f'(x) = 2 \arctan x + \frac{2x}{1+x^2} \ \text{ y que }\ g'(x) = \frac{2x}{1+x^2}\ )\ .$$

    Así, y como es cierto que $f(0) = g(0)$ y $f'(x) \geq g'(x)$ para todo $x \geq 0$, la proposición dada en el enunciado nos dice que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \geq 0$, es decir, sale que

$$2x \arctan x \geq \operatorname{lgn}(1 + x^2),\ \forall\, x \geq 0$$

    como se pedía. $\diamondsuit$

84. Sea $x_0 > 0$. Supongamos que existe una función f acotada, continua y derivable, $\forall\, x \in (x_0, \infty)$ y que existe $\lim_{x\to\infty} f'(x)$. ¿Se deduce de esto que existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ finito ó infinito? (*Sugerencia*: examinar el caso de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{lgn} x)$).

85. (a) Demostrar la fórmula

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\ldots\cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right)}\ .$$

    (*Sugerencia*: ya estuvo como ejercicio de de inducción al comienzo de la guía, o si no lo ha hecho de esa manera, multiplicar arriba y abajo del miembro izquierdo por $2\operatorname{sen}(x/2^n)$ y simplificar).

    (b) Deducir a partir de la parte anterior, una fórmula para la suma

$$\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{4}\tan\left(\frac{x}{4}\right) + \ldots + \frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

    (*Sugerencia*: note que $(\operatorname{lgn}(\cos x))' = -\tan x$).

86. Si $\arctan\dfrac{x}{y} + \operatorname{lgn}(x^2 + y^2) = 0$, demostrar que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$.

87. Se define una función f implícitamente por medio de la ecuación $\operatorname{lgn}(x - y) + \mathrm{e}^{x-2y} = 1$,

    (a) Demostrar que f' está definida en la región del plano $D = \{\ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y < x\ \}$.

[1]Por si no se ha percatado todavía, tal ejercicio debería decir de la siguiente manera:

Proposición 5.2. Sean f, g continuas en $[x_0, \infty)$ y derivables en (x_0, ∞) tales que $f(x_0) = g(x_0)$ y $f'(x) \geq g'(x)$. Entonces $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \geq x_0$.

(b) Hallar la ecuación de la recta tangente a ésta gráfica en el punto $P = (2, 1)$.

88. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$ en el punto $P = (\pi/2, 1)$.

89. Sean $f(x) = \mathrm{e}^x + 2x - \cos x$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2\pi} - \cos x + x \operatorname{lgn}\left(\dfrac{x}{\pi}\right) - \dfrac{\pi}{2}$. Hallar $(f^{-1})'(0)$ y $(g^{-1})'(1)$.

90. Sea $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Comprobar que f'' es positiva en todas partes y deducir la desigualdad

$$\frac{\mathrm{e}^{-a} + \mathrm{e}^{-b}}{2} > \mathrm{e}^{-\frac{a+b}{2}}, \text{ para } a \neq b \,.$$

91. (a) Demostrar que la función definida como $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - a}{b\,\mathrm{e}^x + 1}$, $b > 0$, tiene dos asíntotas horizontales, si $b \neq 1$.
    (b) Con ayuda de la parte (a), hallar una función que tenga como asíntotas las rectas $y = 1$ y $y = 2$, y trazar el gráfico de la solución dada (*Sugerencia*: hay muchas soluciones, pero la idea es conseguir por lo menos una de la forma dada en la parte anterior).

92. Haciendo el análisis por medio de derivadas y los criterios de la 1ra. y 2da. derivada, construír las gráficas de las siguientes funciones:

    (a) $f(x) = \operatorname{lgn}(x^2 + 6x - 55)$
    (b) $f(x) = \operatorname{lgn}(x + \sqrt{1 + x^2})$
    (c) $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$
    (d) $f(x) = (x + 2)\,\mathrm{e}^{1/x}$
    (e) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x + 1}$
    (f) $f(x) = x^x$
    (g) $f(x) = x^2 - \operatorname{lgn}(x^2)$
    (h) $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$

93. Calcular, usando la definición de integrales de Riemann, $\int_0^1 \mathrm{e}^x\, dx$ (*Sugerencia*: busque en esta suma una progresión geométrica).

94. Demostrar que el área debajo de la curva $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[a, b]$ es la misma que la correspondiente al intervalo $[ka, kb]$, cualquiera que sea $k > 0$. Utilizar este razonamiento para dar otra demostración de que $\operatorname{lgn}(ab) = \operatorname{lgn} a + \operatorname{lgn} b$ (*Sugerencia*: para la última parte, note que $\operatorname{lgn}(ab) - \operatorname{lgn} a = \displaystyle\int_a^{ab} \frac{dt}{t}$).

95. Este ejercicio pretende demostrar que la definición de la función exponencial por medio de la función inversa al logaritmo cumple las ya conocidas propiedades de una exponencial. Sea f una función **no idénticamente nula** que satisface la ecuación funcional $f(xy) = f(x) + f(y)$, $\forall\, x, y \in (0, \infty)$.

    (a) Demostrar que $f(1) = 0$ (*Sugerencia*: haga $x = y = 1$).
    (b) Demostrar que f se puede escribir como

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \text{ para } x > 0$$

    (*Sugerencia*: derive la ecuación funcional con respecto a x; haga $x = 1$ y luego integre con respecto a y).
    (c) Si f^{-1} denota la función inversa a f, verificar que $Dom_{f^{-1}} = \mathbf{R}$ y que $Rgo_{f^{-1}} = (0, \infty)$.
    (d) Demostrar que $f^{-1}(0) = 1$.
    (e) Demostrar que $f^{-1}(a + b) = f^{-1}(a) f^{-1}(b)$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ (*Sugerencia*: use la pregunta §94).
    (f) Demostrar que $(f^{-1})'(x) = f^{-1}(x)$, es decir, que la derivada de la función inversa es la misma inversa.

96. Sean $a, b > 0$ y $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continua. Demostrar que

$$\lim_{t \to 0} \int_{at}^{bt} f(x) \frac{dx}{x} = f(0) \operatorname{lgn} \frac{b}{a}$$

(*Sugerencia*: ¿qué debe ocurrir con una función continua en un intervalo cerrado con respecto a los límites?; en la pregunta §22 ya se usó esto!).

97. Hallar todas las funciones continuas que satisfacen la ecuación funcional

$$f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(x)\,dx$$

(*Sugerencia*: derive dicha expresión y recuerde que la función exponencial del tipo $k\,\mathrm{e}^x$ es la **única** que satisface la ecuación $f'(x) = f(x)$).

98. Hallar el valor de a para que el valor medio de la función $f(x) = \operatorname{lgn} x$ en $[1, a]$ sea igual a la velocidad media de dicha función en ese intervalo.

99. Sea $f : I = (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definida como $\displaystyle\int_{2x}^{5x} \frac{dt}{t}$. Demostrar que f es constante, $\forall\, x \in I$.

100. Si $f(x) = \displaystyle\int_1^{\operatorname{lgn} x} \operatorname{sen} t^2\,dt$, calcular $(f^{-1})'(\mathrm{e})$.

101. Resolver la integral indefinida $\int f'(x)dx$, sabiendo que $f'(\operatorname{lgn} x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x \le 1 \\ x & , \quad 1 < x < \infty \end{cases}$ y que $f(0) = 0$.

102. Resolver la siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{-x^2/a}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \operatorname{sen}(\mathrm{e}^x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\,dx$

(g) $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^{x^2}[1+x\,\mathrm{e}^{-(x^2+x^3)}]\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{(a^x-b^x)^2}{(ab)^x}\,dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}\,dx$

(l) $\displaystyle\int x\tan(3x^2)\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\operatorname{lgn} x\operatorname{lgn}(\operatorname{lgn} x)}$

(o) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\cos^2(1+\operatorname{lgn} x)}$

(p) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{lgn}(\operatorname{sen} x)}{\tan x}\,dx$

(q) $\displaystyle\int \frac{1+x}{x(1+x\,\mathrm{e}^x)}\,dx$

(r) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}\,dx$

(s) $\displaystyle\int_1^{n+1} \operatorname{lgn}[\![x]\!]\,dx$

(t) $\displaystyle\int \frac{x}{1-x\operatorname{ctg} x}\,dx$

(u) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{lgn}(x+1)-\operatorname{lgn} x}{x(x+1)}\,dx$

(v) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{x/2}\arctan(\mathrm{e}^{x/2})}{1+\mathrm{e}^x}\,dx$

(w) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{sen}(2x)\,dx$

(x) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}+x\operatorname{lgn}(1+x^2)+1}{1+x^2}\,dx$

(y) Demostrar que $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$, y deducir que $\int_0^{\pi/4} \operatorname{lgn}(1+\tan x)\,dx = (\pi \operatorname{lgn} 2)/8$.

(z) Demostrar la fórmula

$$\mathrm{e}^x - \exp\left(\int_{\operatorname{lgn} 2}^{x} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}}dt\right) = 1\ .$$

$\diamondsuit$ *Solución*: Resolvamos en este ejercicio el (d) y el (t).

(d) En el primer caso, debemos ubicar la derivada de expresiones exponenciales. Intentando multiplicar arriba y abajo por e^x, tenemos:

$$\int \frac{dx}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{\mathrm{e}^x\ dx}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \int \frac{d(\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x)^2+1} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C = \arctan \mathrm{e}^x + C$$

(t) En el segundo caso, el numerador no parece ser la derivada interna del denominador. Pero escribiendo la $\operatorname{ctg} x$ en función de seno y coseno, tenemos:

$$\int \frac{x\,dx}{1-x\operatorname{ctg} x} = \int \frac{x\operatorname{sen} x\,dx}{\operatorname{sen} x - x\cos x} = \int \frac{d(\operatorname{sen} x - x\cos x)}{\operatorname{sen} x - x\cos x} = \int \frac{dt}{t} = \operatorname{lgn}|t| + C = \operatorname{lgn}|\operatorname{sen} x - x\cos x| + C\ ,$$

♢

103. Sea $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\operatorname{lgn} t}{t+1} dt$, para $x > 0$. Hallar $f(x) + f(1/x)$ y comprobar que $f(2) + f(1/2) = (\operatorname{lgn}^2 2)/2$.

104. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región limitada por las curvas $y = 3^x$, $y = (1/3)^x$, $x = -1$ y $x = 1$ alrededor de la recta $y = -2$.

105. Hallar el límite $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\mathrm{e}\, x^2/\pi - \mathrm{e}\,\pi/4 + \int_x^{\pi/2} \mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}\, dt}{1+\cos(2x)}$.

106. (a) Demostrar por inducción la fórmula $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

(b) Usar la parte anterior para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = \operatorname{lgn} 2$$

(*Sugerencia*: en la fórmula de la parte anterior, ubicar una suma de Riemann).

6 Funciones Hiperbólicas

Como una aplicación de las funciones exponenciales, analicemos finalmente las funciones hiperbólicas. En caso de que el lector no las conozca, demos primero sus definiciones y propiedades más elementales.

Definición 6.1. Dado $x \in \mathbb{R}$ arbitrario, se definen el **coseno hiperbólico** y el **seno hiperbólico** como las partes par e impar, respectivamente, de la función exponencial:

$$\cosh x := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\ , \quad \operatorname{senh} x := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\ .$$

Asímismo, se define la **tangente hiperbólica** como la razón entre el seno y el coseno hiperbólicos, es decir,

$$\tanh x := \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\ ,$$

y las definiciones para la **secante**, **cosecante** y **cotangente** hiperbólicas son análogas a las que se dan para las funciones trigonométricas.

Proposición 6.3. Las funciones seno y coseno hiperbólico satisfacen la relación

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1\ .$$

Además, ambas tienen como dominio a todo $\mathbb{R}$, son ambas **no acotadas** y **no periódicas**[2]. Finalmente, el rango del coseno hiperbólico es $[1, \infty)$, y el del seno hiperbólico es $\mathbb{R}$.

107. Demostrar las siguientes identidades:

(a) $\mathrm{e}^{\pm x} = \cosh x \pm \operatorname{senh} x$

(b) $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

(c) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

(d) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

(e) $\operatorname{ctgh}^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

(f) $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

(g) $\operatorname{senh}(2x) = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

(h) $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

(i) $\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}$

(j) $(\operatorname{senh} x + \cosh x)^n = \operatorname{senh} nx + \cosh nx$

[2] La razón de las "negritas", es resaltar que estas dos propiedades **no son** análogas a las propiedades que gozan las funciones trigonométricas, que son tanto acotadas como periódicas.

108. En cada uno de los siguientes casos, se da una de las seis funciones hiperbólicas de cierto argumento u. Hallar las otras cinco:

(a) $\operatorname{senh} u = -3/4$ (c) $\tanh u = -7/25$ (e) $\operatorname{sech} u = 3/5$
(b) $\cosh u = 17/15$ (d) $\operatorname{ctgh} u = 13/12$ (f) $\operatorname{csch} u = 5/12$

109. Deducir cada una las siguientes fórmulas para las funciones hiperbólicas inversas:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(a) Para } x \in \mathbb{R}: & \arg\operatorname{senh} x & = & \operatorname{lgn}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\
\text{(b) Para } x \geq 1: & \arg\cosh x & = & \operatorname{lgn}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \\
\text{(c) Para } \mid x \mid < 1: & \arg\tanh x & = & \dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\dfrac{1+x}{1-x} \\
\text{(d) Para } 0 < x \leq 1: & \arg\operatorname{sech} x & = & \operatorname{lgn}\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad = \quad \arg\cosh\dfrac{1}{x} \\
\text{(e) Para } x \neq 0: & \arg\operatorname{csch} x & = & \operatorname{lgn}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\mid x \mid}\right) \quad = \quad \arg\operatorname{senh}\dfrac{1}{x} \\
\text{(f) Para } \mid x \mid > 1: & \arg\operatorname{ctgh} x & = & \dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\dfrac{x+1}{x-1} \quad = \quad \arg\tanh\dfrac{1}{x}
\end{array}$$

♢ *Solución*: Probemos la fórmula del (d). Notemos que si declaramos

$$x = \operatorname{sech} y \ , \ y \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \arg\operatorname{sech} x \ , \quad 0 < x \leq 1$$

(la elección de las variables es por conveniencia, y el intervalo inicial por invertibilidad), entonces tenemos una ecuación cuadrática en la variable e^y que depende de x. En efecto, si completamos cuadrados (aunque la aplicación directa de la resolvente también sirve), tenemos:

$$\begin{array}{rrcl}
x \ = \ \operatorname{sech} y & = \dfrac{2}{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}} & = & \dfrac{2\,\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^{2y} + 1} \\
\Longrightarrow & \mathrm{e}^{2y} - \dfrac{2}{x}\mathrm{e}^y + 1 & = & 0 \\
\Longrightarrow & \mathrm{e}^{2y} - \dfrac{2}{x}\mathrm{e}^y + \dfrac{1}{x^2} & = & \dfrac{1}{x^2} - 1 \\
\Longrightarrow & \left(\mathrm{e}^y - \dfrac{1}{x}\right)^2 & = & \dfrac{1-x^2}{x^2} \\
\Longrightarrow & \mathrm{e}^y - \dfrac{1}{x} & = & \pm\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x^2}} \\
\Longrightarrow & \mathrm{e}^y & = & \dfrac{1}{x} \pm \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\mid x \mid} \quad \overset{0<x\leq 1}{\Longrightarrow} \quad \mathrm{e}^y \ = \ \dfrac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}
\end{array}$$

(nótese la desaparición del módulo en el último paso por ser $0 < x \leq 1$). Ahora bien, aunque ambos signos son posibles en la igualdad anterior (es decir, no hay contradicción entre los signos de e^y y dicha fracción), la escogencia del signo negativo la convierte en una fracción con rango en $(0, 1]$, cosa que es imposible porque $\mathrm{e}^y \geq 1$ si $y \geq 0$. Así, el signo correcto a tomar es el positivo, y tomando logaritmos a ambos lados, tenemos finalmente

$$\mathrm{e}^y = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = \operatorname{lgn}\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \ ,$$

como pedía la primera igualdad a demostrar. La segunda es consecuencia más bien notacional de que

$$\begin{array}{rcl}
y = \arg\operatorname{sech} x & \Longleftrightarrow & x = \operatorname{sech} y \\
\Longleftrightarrow \quad \dfrac{1}{x} = \cosh y & \Longleftrightarrow & y = \arg\cosh\dfrac{1}{x} \ ,
\end{array}$$

y con esto terminamos. Es de hacer notar, no sólo en este sino en los seis ejercicios presentados, que al igual (o más bien, un poco más general) que en el caso trigonométrico, lo variado de los dominios de definición de las funciones hiperbólicas inversas se debe a que el seno hiperbólico es inyectivo, pero nulo en el origen, y el coseno hiperbólico no es inyectivo, y con rango mayor que 1. Así, las seis funciones hiperbólicas tienen que restringirse con cuidado para no definir de manera errónea sus fórmulas, especialmente en el caso en el que aparecen ecuaciones cuadráticas en su definición, como en el caso que acabamos de resolver. ♢

110. Este ejercicio refleja los significados geométricos de las funciones hiperbólicas (ver figura 8):

(a) Si L es la recta tangente a la hipérbola $x^2-y^2=1$ en el punto $P=(x_0,y_0)$, para el cual $\exists\, u>0$ tal que $x_0=\cosh u$ y $y_0=\operatorname{senh} u$, demostrar que L corta al eje x en el punto $A=(\operatorname{sech} u,0)$ y al eje y en el punto $B=(0,-\operatorname{csch} u)$.

(b) Demostrar que la tangente a dicha hipérbola en el vértice $(1,0)$ corta a la recta que va desde el origen de coordenadas hasta el punto P (ver la parte anterior) en el punto $C=(1,\tanh u)$.

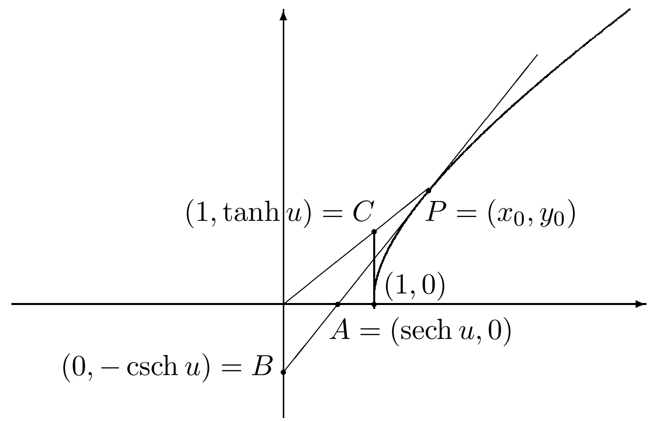


Fig. 8. Gráfica del ejercicio §110

111. Supongamos que existe una función tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-5$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$. Hallar

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\tanh x+f(-x)\operatorname{ctgh} x}{-f(2x)+f(-2x)}\ .$$

112. Hallar los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{senh} x-\operatorname{senh} a}{x-a}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh}^2 x}{\operatorname{lgn}(\cosh 3x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{lgn}(\cosh x)}{\operatorname{lgn}(\cos x)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x-\operatorname{lgn}(\cosh x)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} 2x}-\operatorname{senh} x}{\tanh(3x)}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cosh\sqrt{2}x-1}{x^2}\right)^{\operatorname{ctg} x}$

♢ *Solución*: Resolvamos el (d). Como la forma indeterminada es $\infty-\infty$ y la naturaleza de ambas funciones no parece ser la misma, aprovechamos el hecho de que $x=\operatorname{lgn}(\mathrm{e}^x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x-\operatorname{lgn}(\cosh x) &= \lim_{x\to\infty}\operatorname{lgn}(\mathrm{e}^x)-\operatorname{lgn}(\cosh x) = \lim_{x\to\infty}\operatorname{lgn}\frac{\mathrm{e}^x}{\cosh x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\operatorname{lgn}\frac{2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} \overset{*}{=} \operatorname{lgn}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\right) = \operatorname{lgn}\frac{2}{1+0} = \operatorname{lgn} 2\ ,\end{aligned}$$

donde en el paso (*) estamos usando la continuidad de la función logaritmo. ♢

113. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $f(x)=\operatorname{ctgh}(\tan x)$

(b) $f(x)=\mathrm{e}^{ax}\,\dfrac{\cosh x-a\operatorname{senh} x}{1-a^2}\quad(\mid a\mid\neq 1)$

(c) $f(x)=\arctan x+\operatorname{arg\,tanh} x$

(d) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arg\,senh} x}{\sqrt{1+x^2}}-\arctan x$

(e) $f(x)=\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{2x}-1}\right)^2\tanh x$

(f) $\cosh y=\operatorname{ctg} x$ (*Sugerencia*: derivación implícita!)

♢ *Solución*: Resolvamos el (c). Por el ejercicio § 109(c), se tiene que $\operatorname{arg\,tanh} x=\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\dfrac{1+x}{1-x}$, por lo que primero debemos tener una tabla para las seis derivadas notables de las inversas trignométricas; solo nos ocuparemos aquí de la correspondiente a la tangente hiperbólica:

$$(\operatorname{arg\,tanh} x)'=\left(\frac{1}{2}\operatorname{lgn}\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{2}\left(\operatorname{lgn}(1+x)-\operatorname{lgn}(1-x)\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}=\frac{1}{1-x^2}\ ,$$

válida obviamente solo para $x \in (-1,1)$. (El lector debería a estas alturas tener esa tabla completa, calculando las derivadas de las cinco restantes funciones del ejercicio § 109.). Con este resultado a la mano, el ejercicio pedido es muy sencillo, e incluso susceptible de simplificación, dado lo semejantes que son ambas arcotangentes cerca del origen:

$$f'(x) = \Big(\arctan x + \operatorname{arg\,tanh} x\Big)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1-x^2} = \frac{1-x^2+1+x^2}{(1+x^2)(1-x^2)} = -\frac{2}{1-x^4}\ , \quad \forall\, x \in (-1,1)\ ,$$

y no debe olvidar el lector que, a pesar de que no se pregunta de antemano un dominio, este debe ser agregado por completitud en la resolución. ♢

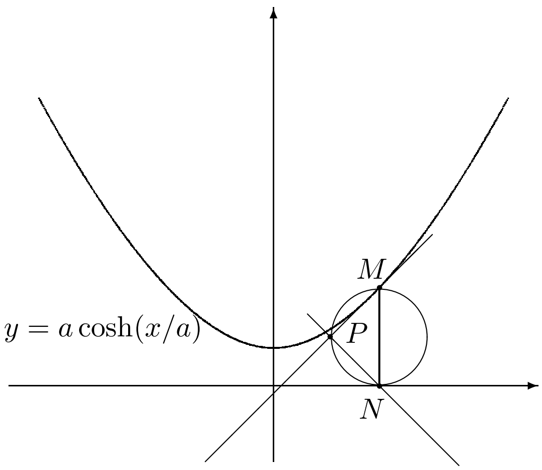


Fig. 9. Gráfica del ejercicio §114

114. Sea M un punto de la *catenaria* $y = a\cosh(x/a)$ y N su proyección sobre el eje x. Se construye un semicírculo de diámetro $\overline{MN}$, tal como lo indica la figura 9, y se escoge un punto P sobre el semicírculo tal que la longitud del segmento $\overline{NP}$ sea a. Demostrar que la recta que pasa por M y por P es tangente a la catenaria.

115. Resolver las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \tanh x\, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh^4 x}\, dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{senh} x}$

(d) $\displaystyle\int \frac{1+\cosh 2x}{x+\operatorname{senh} x\cosh x} dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\, dx}{\mathrm{e}^{3x} - 3\,\mathrm{e}^x + 3\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-3x}}$

(f) $\displaystyle\int \frac{(\mathrm{e}^x - 4\,\mathrm{e}^{-2x})\, dx}{\mathrm{e}^{3x} + 6 + 12\,\mathrm{e}^{-3x} + 8\,\mathrm{e}^{-6x}}$

(g) $\displaystyle\int x\cosh^2(x^2/2)\, dx$

(h) $\displaystyle\int \sqrt{\cosh x - 1}\, dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{senh} x + 2\cosh x}$

(j) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x\ dx}{\cosh x - \operatorname{senh} x}$

(k) Demostrar la identidad

$$\operatorname{senh} u \cosh v = \frac{1}{2}\left[\operatorname{senh}(u+v) - \operatorname{senh}(u-v)\right]\ ,$$

y con este resultado, calcular la integral

$$\int \operatorname{senh} 5x \cosh 3x\, dx\ .$$

♢ *Solución*: Veamos la solución del (e). Recordando la fórmula del binomio $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, y comparándola con el denominador del subintegrando, es claro que este es igual a $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^3}\, dx$. Haciendo el cambio $u = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$, $du = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\, dx$, tenemos que:

$$I = \int \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^3}\, dx = \int \frac{du}{u^3} = \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2} + C\ .$$

y termina el problema. Notando ahora que

$$\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^3} = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} \cdot \frac{2^2}{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{\operatorname{csch}^2 x}{4\tanh x}\ ,$$

le sugerimos al lector que vuelva a resolver la integral usando funciones hiperbólicas. ♢

116. Sea S la región limitada por las gráficas de $y = \cosh x$ y $y = 0$ en el intervalo $[0, \operatorname{lgn} 2]$. Hallar el volumen del sólido generado por la rotación de S alrededor de:

(a) el eje $y = -1$,

(b) el eje $x = -2$.

117. Marcar sólamente una de las alternativas dadas en cada uno de los siguientes ejercicios:

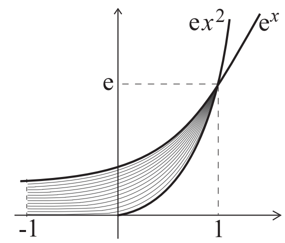
(I) Si $F(x) = \displaystyle\int_1^{\operatorname{lgn} x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\, dt$, entonces $F'(x)$ es igual a:

a. $\dfrac{1}{\operatorname{lgn} x}$ b. $\dfrac{1}{x \operatorname{lgn} x}$ c. $\dfrac{e^{\operatorname{lgn} x}}{\operatorname{lgn} x}$ d. $\dfrac{1}{\operatorname{lgn} x} - \operatorname{lgn} e$ e. $\dfrac{x}{\operatorname{lgn} x} - e$

(II) El valor de $\displaystyle\int_{e}^{e^2} \frac{x\,dx}{x^2-1}$ es:

a. $\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}(e^2+1)$ b. $\dfrac{1}{4}\operatorname{lgn}(e^2-1)$ c. $\dfrac{e}{2}\operatorname{lgn}(e^2+1)$ d. $\dfrac{e}{4}\operatorname{lgn}(e^2-1)$ e. $\dfrac{e^2}{4}$

(III) El área sombreada en la figura es igual a:



a. $\dfrac{e-1}{e}$ b. $\dfrac{1-2e^2}{3}$ c. $\dfrac{2e^2-3}{3e}$ d. $\dfrac{e+1}{e-1}$ e. $\dfrac{e^2-1}{e^2+1}$

(IV) El área encerrada por la curva de ecuación $y = f(x)$, los ejes coordenados y la recta $x = x_0$ está dada por $x_0\, e^{x_0}$. Entonces la fórmula de $f(x)$ es:

a. e^x b. $x\,e^x$ c. $(x-1)\,e^x$ d. $(x+1)\,e^x$ e. $(x^2-x)\,e^x$

(V) Si $f(x) = \operatorname{senh}(x + \cosh x)$, entonces $f''(0)$ es igual a:

a. $2e$ b. e c. 1 d. $\operatorname{senh} 1 - \cosh 1$ e. e^{-1}

(VI) La expresión definida como $A = \cosh(\operatorname{arg\,sech} x) + \tanh(\operatorname{arg\,ctgh} x)$ es equivalente a:

a. $2/x$ b. $2x$ c. 1 d. $x + 1/x$ e. 2

7 Métodos de Integración

En éste capítulo emprenderemos el estudio de los diversos métodos de integración para integrales indefinidas, clasificando las integrales por tipos.

Le advertimos al lector que casi todas las integrales que aparecen esta guía tienen un cambio de variable previo que facilitan su posterior cálculo por otros métodos. Este método no sólo se dió con mucha antelación por ser el más potente de todos, sino porque es recurso inicial casi obligado en cualquier ejercicio de cálculo de antiderivadas.

118. A continuación se expone una tabla de integrales notables que Ud. ya conoce, indicando en la primera columna la función y en la segunda su primitiva (excepto por una constante de integración, la cual se ha omitido en la mayoría de los casos por eficiencia). Las primeras cuatro son de carácter teórico y general, mientras que las restantes son las funciones concretas más usuales. Usando dicha tabla, calcular las integrales indefinidas dadas:

(a) $\displaystyle\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}$

(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x(1+x)}\,dx$ (*Sugerencia*: $\dfrac{\sqrt{x}}{x}\,dx = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$)

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2+9}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x+7}{x+3}\,dx$

(i) $\displaystyle\int x\tan(x^2+1)\,dx$

(j) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$

(l) $\displaystyle\int \operatorname{sen} \operatorname{lgn} x \frac{dx}{x}$

(m) $\displaystyle\int \frac{x - \sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2} dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt{\arccos^2 3x}}{\sqrt{1-9x^2}} dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}} dx$

(p) $\displaystyle\int \frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$

(q) $\displaystyle\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx$

(r) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x - \cos x}} dx$

(s) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \operatorname{lgn} x \operatorname{lgn} \operatorname{lgn} x}$

(t) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx$

(u) $\displaystyle\int \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$

(v) $\displaystyle\int \frac{e^{-x} \cos x \, dx}{(\cos x + \operatorname{sen} x)^2}$

(w) $\displaystyle\int \frac{2+6^x+6^{-x}}{(2^{-x}+3^x)^2} dx$

(x) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\cosh x)^2}$ (*Sugerencia*: escribir $\cosh x$ en términos de funciones exponenciales).

(y) $\displaystyle\int (\operatorname{arcsen} x + \arccos x)\, dx$ (*Sug.*: ¿que relación hay entre C_1 y C_2 de la fórmula (*) de la tabla?).

(z) Sean $x, y \in \mathbf{R}$ constantes tales que $xy \neq 1$ y sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$. Sin resolver la integral, demostrar que

$$F(x) + F(y) = F\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) .$$

(*Sugerencia*: Simplificar $F\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) - F(y)$ y hacer el cambio de variable $t = \dfrac{u+y}{1-uy}$).

$\int f(x)\,dx$	$F(x)$
$\int f(ax+b)\,dx$	$\frac{1}{a}F(ax+b)$
$\int (f_1(x) \pm \alpha f_2(x))\,dx$	$F_1(x) \pm \alpha F_2(x)$
$\int f(g(x))g'(x)\,dx$	$F(g(x))$
$\int x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$, si $n \neq -1$
$\int \frac{dx}{x}$	$\operatorname{lgn}\lvert x\rvert$
$\int \operatorname{sen} x\,dx$	$-\cos x$
$\int \operatorname{senh} x\,dx$	$\cosh x$
$\int \tan x\,dx$	$-\operatorname{lgn}\lvert\cos x\rvert$
$\int \tanh x\,dx$	$\operatorname{lgn}\cosh x$
$\int \sec^2 x\,dx$	$\tan x$
$\int \operatorname{sech}^2 x\,dx$	$-\tanh x$
$\int \sec x \tan x\,dx$	$\sec x$
$\int \operatorname{sech} x \tanh x\,dx$	$-\operatorname{sech} x$
$\int \frac{dx}{1+x^2}$	$\begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arcctg}(1/x) + C_2 \end{cases}$
$\int \frac{dx}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\operatorname{lgn}\left\lvert\frac{1-x}{1+x}\right\rvert = \operatorname{arg}\tanh x$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \operatorname{arcsen} x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$ (*)
$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{lgn}(x+\sqrt{1+x^2}) = \operatorname{arg}\operatorname{senh} x$
$\int e^x\,dx$	e^x
$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\operatorname{lgn} a}$

♢ *Solución*: Resolvamos los ejercicios (b), (m) y (w).

(b) Como $x^4 + x^{-4} + 2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(x^{-2}) + (x^{-2})^2$, tenemos que:

$$\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{(x^2+x^{-2})^2}}{x^3} dx = \int \left(\frac{x^2}{x^3} + \frac{x^{-2}}{x^3}\right) dx = \int \frac{dx}{x} + \int x^{-5}\,dx = \operatorname{lgn}|x| - \frac{1}{4x^4} + C$$

(m) En este caso hay que estar muy claro con la regla de la cadena; la función que más molesta es el subradical, y su derivada es la fracción $2/(1+4x^2)$. Pero no sirve de entrada hacer el cambio $v = \arctan 2x$, ya que el sumando x

nada tiene que ver con él. Si antes de eso separamos la integral en dos sumandos:

$$\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}\,dx = \int \frac{x}{1+4x^2}\,dx - \int \frac{\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x\,dx}{1+4x^2} - \frac{1}{2}\int \sqrt{\arctan 2x}\frac{2\,dx}{1+(2x)^2}\ ,$$

ocurre algo que es típico en integrales de fracciones complicadas; el cambio anterior solo sirve para la segunda de las integrales separadas. Además, observamos (y es la razón del 8 que aparece ahora) que la primera integral es además susceptible del cambio $u = 1+4x^2$, de modo que:

$$\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int v^{1/2}\,dv = \frac{1}{8}\operatorname{lgn} u - \frac{1}{2}\frac{v^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{8}\operatorname{lgn}(1+4x^2) - \frac{1}{3}\sqrt{(\arctan 2x)^3} + C\ ,$$

donde podemos omitir el módulo en el logaritmo, ya que $1+4x^2 > 0$ siempre. Este ejemplo muestra que varios términos en una misma integral pueden ser o bien las funciones a cambiar o bien las derivadas de tales cambios.

(w) En este caso, hay dos maneras de resolver la integral. En primer lugar, notando (otra vez una factorización con exponentes negativos) que

$$\begin{aligned} 2+6^x+6^{-x} &= (6^{x/2})^2 + 2(6^{x/2})(6^{-x/2}) + (6^{-x/2})^2 = \left(6^{x/2}+6^{-x/2}\right)^2 = 6^{-x}\,(1+6^x)^2\,, \\ \left(2^{-x}+3^x\right)^2 &= \left[2^{-x}(1+2^x3^x)\right]^2 = 2^{-2x}\,(1+6^x)^2\ , \end{aligned}$$

de modo que

$$\int \frac{2+6^x+6^{-x}}{(2^{-x}+3^x)^2}\,dx = \int \frac{6^{-x}\,(1+6^x)^2}{2^{-2x}\,(1+6^x)^2}\,dx = \int \frac{2^{2x}}{2^x\cdot 3^x}\,dx = \int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = \frac{1}{\operatorname{lgn}(2/3)}\left(\frac{2}{3}\right)^x + C$$

En segundo lugar, la presencia del cuadrado en el denominador sugiere que la primitiva del subintegrando *puede* ser un cociente. En efecto, haciendo manipulaciones parecidas a las que se hicieron antes, tenemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{2+6^x+6^{-x}}{(2^{-x}+3^x)^2}\,dx &= \int \frac{6^x\,(1+6^{-x})^2}{(3^x)^2\,(1+6^{-x})^2}\,dx = \frac{1}{\operatorname{lgn}(2/3)}\int \frac{2^x\cdot 3^x\operatorname{lgn}(2/3)}{(3^x)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{\operatorname{lgn}(2/3)}\int \frac{2^x\operatorname{lgn}2\cdot 3^x - 3^x\operatorname{lgn}3\cdot 2^x}{(3^x)^2}\,dx = \frac{1}{\operatorname{lgn}(2/3)}\int \left(\frac{2^x}{3^x}\right)' dx = \frac{1}{\operatorname{lgn}(2/3)}\left(\frac{2}{3}\right)^x + C \end{aligned}$$

por lo que las soluciones coinciden. Es claro que este método es un muy rebuscado, pero solo se expone con la intención de que el lector note lo difícil que resulta calcular una antiderivada “deshaciendo” los pasos que se hicieron al derivar, mucho más si se trata de integrales de cocientes.

♢

119. Comprobar que las integrales del tipo

$$\int R\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

se convierten en integrales polinómicas, usando el cambio de variable $u^n = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Con este resultado, calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\operatorname{lgn}x}}{x\operatorname{lgn}x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\,\sqrt[3]{x}}$

♢ *Solución*: Resolvamos el (c); la técnica que usaremos al principio con los índices de las raíces es la misma que se debe usar el los ejercicios (a) y (f). Como $\sqrt{x}$ y $\sqrt[3]{x}$ no tienen el mismo índice, no es claro si el cambio de variable es $u^2 = x$ ó $u^3 = x$. Pero reescribiendo ambas como $\sqrt{x} = \sqrt[6]{x^3}$ y $\sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^2}$, ahora ambas tienen índice “6”, por lo que es **muy** claro que el cambio apropiado es $u^6 = x$. Haciéndolo, y usando que $6u^5\,du = dx$, tenemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx &= \int \frac{\sqrt[6]{x^3}+1}{\sqrt[6]{x^2}+1}\,dx = \int \frac{(\sqrt[6]{u^6})^3+1}{(\sqrt[6]{u^6})^2+1}\,(6u^5\,du) = 6\int \frac{u^5\,(u^3+1)}{u^2+1}\,du \\ &= 6\int \frac{u^8+u^5}{u^2+1}\,du = 6\int \left(u^6-u^4+u^3+u^2-u-1+\frac{u+2}{u^2+1}\right)du\ , \end{aligned}$$

donde en el último paso usamos el poco recordado, pero muy útil *algortimo de división polinomial*, el cual pasamos a recordar ("refresacar la memoria" deberíamos decir); si $D_m(u)$ y $d_n(u)$ son polinomios de grados m y n respectivamente, con $m \geq n$, entonces la función racional D_m/d_n se puede expresar como la suma de un polinomio de grado la diferencia $m-n$, llamado *cociente*, $C_{m-n}(u)$, y otra función racional cuyo numerador, el *resto* de la disión $R_k(u)$, es de grado menor que el grado del denominador (es decir, $k<n$). En fórmulas, esto es:

$$\forall \frac{D_m(u)}{d_n(u)} \ , \quad \text{con } m \geq n: \ \exists C_{m-n}(u), R_k(u) \ (k<n) \text{ tales que } \frac{D_m(u)}{d_n(u)} = C_{m-n}(u) + \frac{R_k(u)}{d_n(u)} \ .$$

Dicho en menos palabras, esta es la estructura general de la famosa "división en galera" que se aprende a calcular en Bachillerato al dividir polinomios. En nuestro caso, $D_8(u) = u^8 + u^5$, $d_2(u) = u^2+1$, y, haciendo la división en galera, el lector debería chequear que el cociente de la división es $C_6(u) = u^6 - u^4 + u^3 + u^2 - u - 1$ y el resto es $R(u) = u+2$ (de grado $1 < 2 = \mathrm{grd} d_2(u)$). El punto importante de todo este recordatorio, es que se comete mucho el error de incluir el resíduo **sin** dividirlo entre el denominador inicial, cosa que conduce a la contradicción de expresar una función racional **sin división exacta** como la suma de dos polinomios. Retomando el ejercicio como lo dejamos arriba, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}\, dx &= 6\int \left(u^6 - u^4 + u^3 + u^2 - u - 1 + \frac{u+2}{u^2+1}\right) du \ = \ 6\left(\frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} - u + \int \frac{u+2}{u^2+1}\, du\right) \\
&= \frac{6}{7}u^7 - \frac{6}{5}u^5 + \frac{3}{2}u^4 + 2u^3 - 3u^2 - 6u + \frac{6}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}\, du + 12\int \frac{du}{u^2+1} \\
&= \frac{6}{7}u^7 - \frac{6}{5}u^5 + \frac{3}{2}u^4 + 2u^3 - 3u^2 - 6u + 3\,\mathrm{lgn}\,|u^2+1| + 12\arctan u + C \\
&= \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 3\,\mathrm{lgn}\,|\sqrt[3]{x}+1| + 12\arctan(\sqrt[6]{x}) + C \ ,
\end{aligned}$$

donde la aparición del logaritmo y la arcotangente se debe a que la integral inicialmente era un cociente de raíces binomias de distinto índice. Nótese además que al devolver el cambio de variable es tradicional (por racionalización de monomios) expresar las potencias u^4, u^3 y u^2 (todas ellas divisores de 6) como $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt{x}$ y $\sqrt[3]{x}$, respectivamente. Precisamente por esta razón es que la técnica de cambio variable pide por hipótesis que el C.V. sea **invertible**. ♢

120. Usando completación de cuadrados, y las fórmulas (por ahora notables; luego las justificaremos con los cambios trigonométricos):

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+a^2} &= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \ , \\
\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \mathrm{arcsen}\,\frac{x}{a} \ , \\
\int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a}\,\mathrm{lgn}\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \ = \ \frac{1}{a}\,\mathrm{arg\,tanh}\,\frac{x}{a} \ , \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \mathrm{lgn}\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) \ = \ \mathrm{arg\,senh}\,\frac{x}{a} \ ,
\end{aligned}$$

resolver las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\, dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\, dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{(n-x)(x-3n)}\, dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-2x^2-1}\, dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^6-x^3-2}\, dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x\cos\alpha+1}\, dx$
(*Sugerencia*: $\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha = 1$)

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x\,\mathrm{sen}\,\alpha-\cos 2\alpha}$
(*Sugerencia*: $\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha = \cos 2\alpha$)

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$

(j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$

(k) $\displaystyle\int \frac{3x-4}{\sqrt{x^2-4x+5}}\, dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}\,dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\,dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x-6\operatorname{sen} x+12}}\,dx$

(p) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}\,dx$

(q) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{lgn} x}{x\sqrt{1-4\operatorname{lgn} x-\operatorname{lgn}^2 x}}\,dx$

(r) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{10+4\,\mathrm{e}^x+4\,\mathrm{e}^{2x}}}\,dx$

121. Comprobar que las integrales del tipo

$$\int \frac{dx}{(mx+n)^k\,\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

se reducen a integrales del tipo anterior, usando la sustitución $mx+n=1/u$. Con este resultado, calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2\,\sqrt{x^2+2x-3}}$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+2x}}$

122. Demostrar que

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ ,$$

donde P_n es un polinomio de grado n, Q_{n-1} es otro de grado $n-1$ con coeficientes indeterminados y λ es una constante. Con este resultado, resolver las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$

♢ *Solución*: Resolvamos ahora el (c). La aparición del monomio x en el denominador no permite emplear el método de este ejercicio, pero descomponemos el integrando en dos, de modo que:

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}+\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx\ ,$$

y la primera integral en el lado derecho es del tipo anterior, la cual el lector ya sabrá resolver. En cuanto a la segunda, aplicamos el método de esta pregunta y escribimos

$$\int\frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2-x+1}}=a\sqrt{x^2-x+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Para hallar a y λ, derivamos a ambos lados de la expresión anterior para obtener:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{a(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-x+1}}\ .$$

Identificando numeradores en ambos lados de la última expresión, llegamos a

$$2x+2=a(2x-1)+2\lambda\implies$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} 2 & = & 2a & \Longrightarrow & a=1\\ 2 & = & -a+2\lambda & \Longrightarrow & \lambda=\dfrac{1}{2}(2+a)=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

Así, la segunda integral tiene por solución

$$I_2 = \sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} \ ,$$

y juntando esto con lo obtenido al comienzo, llegamos a que la integral propuesta es igual a

$$\sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}} \ ,$$

con lo cual el lector ya tiene para resolver por el método de integrales cuadráticas una sola integral, y otra de ellas por el método de la pregunta anterior. ♢

123. Resolver las siguientes integrales trigonométricas:

(a) $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}\,dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^4 x}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x+\pi/4)}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx$ (j) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{lgn}(\tan x)}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx$ (g) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}\,dx$ (k) $\displaystyle\int_0^{\alpha} (\cos 2\alpha - \cos 2x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{e}^{-\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$ (l) $\displaystyle\int (\sqrt{\operatorname{sen} x} + \cos x)^2\,dx$

♢ *Solución*: Veamos la solución del (e). Recordando la identidad $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$, el numerador se puede escribir como

$$\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x = (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2 + 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x = \cos^2 2x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{2}\cos^2 2x + \frac{1}{2} \ ,$$

por lo que la integral es igual a

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\cos^2 2x + 1}{\cos 2x}\,dx = \frac{1}{4}\left(\int \cos 2x\,d(2x) + \frac{1}{4}\int \sec 2x\,d(2x)\right) = \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen} 2x + \operatorname{lgn}|\sec 2x + \tan 2x|\right) + C \ ,$$

donde el resultado de $\int \sec u\,du$ se puede considerar notable; basta con multiplicar arriba y abajo del subintegrando por $\sec u + \tan u$, y darse cuenta de la relación $(\sec u + \tan u)' = \sec u \tan u + \sec^2 u$. ♢

124. Este ejercicio pretende clasificar algunas de las integrales trigonométricas polinomiales y racionales, como son

$$I_1 = \int \operatorname{sen}^m x\,dx \ , \ I_2 = \int \cos^n x\,dx \ , \ I_3 = \int \frac{\cos^n x}{\operatorname{sen}^m x}\,dx \ .$$

Comprobar las siguientes fórmulas de integración y usar dicho procedimiento para calcular las integrales dadas (la fórmula marcada con (*) se reduce a fracciones simples, y éstas todavía no las hemos visto; una vez que llegue a la integral pedida, puede dejarla así y resolverla más adelante):

$$\int \operatorname{sen}^m x\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int (1-\cos^2 x)^k (\operatorname{sen} x\,dx) & , \quad m = 2k+1 \\ \displaystyle\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k dx & , \quad m = 2k \end{cases}$$

$$\int \cos^n x\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int (1-\operatorname{sen}^2 x)^k (\cos x\,dx) & , \quad n = 2k+1 \\ \displaystyle\int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^k dx & , \quad n = 2k \end{cases}$$

$$\int \frac{\cos^n x}{\operatorname{sen}^m x}\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)^k}{\operatorname{sen}^m x}(\cos x\,dx) & , \quad m \in \mathbf{Z},\ n = 2k+1 \\ \displaystyle\int \frac{(1+\tan^2 x)^{k-k'-1}}{\tan^{2k} x}(\sec^2 x\,dx) & , \quad m = 2k,\ n = 2k' \\ \displaystyle\int \frac{(\sec^2 x)^{k-k'}}{(\sec^2 x - 1)^{k+1}}(\sec x \tan x\,dx) & , \quad m = 2k,\ n = 2k'+1\ (*) \end{cases}$$

(a) $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$

(b) $\int \operatorname{sen}^5 x \sqrt[3]{\cos x}\,dx$

(c) $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x}\,dx$

(d) $\int \tan^5 x\,dx$

(e) $\int \left(e^x + \frac{1}{x}\right)\cos^6(e^x + \operatorname{lgn} x)\,dx$

(f) $\int x \operatorname{sen}^3\left(\frac{x^2}{2}\right)\cos^5\left(\frac{x^2}{2}\right)\,dx$

(g) $\int \frac{\cos^4 x}{\operatorname{sen}^8 x}\,dx$

(h) $\int \frac{\operatorname{sen}^2(x+\pi/4)}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx$

(i) $\int \frac{(x^2+1)\cos^3(x^3+3x)}{\sqrt{\operatorname{sen}(x^3+3x)}}\,dx$

(j) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 2x\,dx$

(k) $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}\,dx$

(l) $\int \frac{(x+1)\cos^3(2x^2+4x)}{\operatorname{sen}^2(x^2+2x)}\,dx$

(m) Con cambio de variable $u = \dfrac{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}$, resolver la integral

$$\int \frac{\cos^{n-1}\left(\frac{x+a}{2}\right)}{\operatorname{sen}^{n+1}\left(\frac{x-a}{2}\right)}\,dx\ .$$

125. Con el mismo ánimo del ejercicio anterior, pero ahora resolvemos las integrales

$$I_1 = \int \tan^m x\,dx\ ,\quad I_2 = \int \sec^n x\,dx\ ,\quad I_3 = \int \tan^m x \sec^n x\,dx\ .$$

Comprobar las siguientes fórmulas de integración y usar dicho procedimiento para calcular las integrales dadas (el mismo comentario para las integrales marcadas con (*)):

$$\int \tan^m x\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int (\sec^2 x - 1)^k\,dx & , \quad m = 2k \\ \displaystyle\int \frac{(\sec^2 x - 1)^k}{\sec x}(\sec x \tan x\,dx) & , \quad m = 2k+1 \end{cases}$$

$$\int \sec^n x\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int (\tan^2 x + 1)^{k-1}(\sec^2 x\,dx) & , \quad n = 2k \\ \displaystyle\int \frac{\cos x}{(1-\operatorname{sen}^2 x)^{k+1}}\,dx & , \quad n = 2k+1\ (*) \end{cases}$$

$$\int \tan^m x \sec^n x\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int \tan^{2k} x(\tan^2 x + 1)^{k'-1}(\sec^2 x\,dx) & , \quad m = 2k,\ n = 2k' \\ \displaystyle\int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{2k'}(\sec x \tan x\,dx) & , \quad m = 2k+1,\ n = 2k'+1 \\ \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^{2k} x}{(1-\operatorname{sen}^2 x)^{k+k'}}(\cos x\,dx) & , \quad m = 2k,\ n = 2k'+1\ (*) \end{cases}$$

(a) $\int \sec^2 x \tan^2 x\,dx$

(b) $\int \frac{\tan^4(e^x)}{e^{-x}}\,dx$

(c) $\int \tan^3(x/4)\,dx$

(d) $\int \sec^3 x \tan x\,dx$

(e) $\int \sec^3 x\,dx$ (*Sugerencia*: $\frac{4}{(1-u^2)^2} = \frac{1}{1-u} + \frac{1}{(1-u)^2} + \frac{1}{1+u} + \frac{1}{(1+u)^2}$)

(f) $\int \frac{dx}{\cos x \operatorname{sen}^3 x}$ (*Sug.*: dividir arriba y abajo por $\cos^4 x$)

(g) $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\csc^4 x}\,dx$

(h) $\int \operatorname{ctg}^6 x dx$

(i) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos 2x}$

(j) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\operatorname{sen}^3 x \cos^5 x}}$

(k) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx$

(l) $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sqrt{\operatorname{sen} 2x}}$

(m) $\int \sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^{14} x}}\,dx$

126. Resolver las siguientes integrales por el método de sustitución trigonométrica, usando cualquiera de los cambios de variable de la tabla adjunta ($R(u)$ designa una función racional en la variable u):

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^6}\,dx$

Tipo de integral:	Hacer:	Tipo de integral:	Hacer:
$\int R(a^2-x^2)\,dx$	$x=a\,\mathrm{sen}\,\theta$	$\int R(\sqrt{x},\sqrt{a^2-x})\,dx$	$x=a\,\mathrm{sen}^2\,\theta$
$\int R(a^2+x^2)\,dx$	$x=a\tan\theta$	$\int R(\sqrt{x},\sqrt{a^2+x})\,dx$	$x=a\tan^2\theta$
$\int R(x^2-a^2)\,dx$	$x=a\sec\theta$	$\int R(\sqrt{x},\sqrt{x-a^2})\,dx$	$x=a\sec^2\theta$

(d) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1+x)^3}}$

(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

(h) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-4x^2}}{x}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x+x^2})(1+x)}$

(j) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+x^2-2}}\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}}\,dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}\,dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx$

(o) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+4x+13}\,dx$

127. Demostrar las fórmulas trigonométricas

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta &= \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\ ,\\
2\cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\ ,\\
2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta &= \mathrm{sen}(\alpha-\beta)+\mathrm{sen}(\alpha+\beta)\ ,
\end{aligned}$$

y con este resultado, evaluar las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \mathrm{sen}\,5x\cos x\,dx$ (b) $\displaystyle\int \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}(x+a)\,\mathrm{sen}(x+b)\,dx$ (c) $\displaystyle\int \cos^2 ax\cos^2 bx\,dx$

128. Las integrales del tipo $\displaystyle\int R(\mathrm{sen}\,x,\cos x)\,dx$, donde R es una función racional en las funciones $\mathrm{sen}\,x$ y $\cos x$, se resuelven por medio del importante cambio de variable $u=\tan(x/2)$. Las identidades siguientes proporcionan las fórmulas necesarias para usar este cambio, reduciéndo la integral dada en una fracción cuadrática:

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\tan^2(x/2)}{\sec^2(x/2)} = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad x=2\arctan u\ ,\ \forall\, x\in(-\pi,\pi)\\
\mathrm{sen}\,x &= 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\tan(x/2)}{\sec^2(x/2)} = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{2u}{1+u^2} \qquad dx=\frac{2}{1+u^2}du
\end{aligned}$$

Con este cambio, resolver las siguientes integrales (con esto, suelen aparecer fracciones simples; a menos que sea muy sencilla la fracción resultante, puede dejar el resultado pendiente para cuando veamos este método):

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

(b) $\displaystyle\int \frac{2-\mathrm{sen}\,x}{2+\cos x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,x}{1-\mathrm{sen}\,x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\,\mathrm{sen}\,x}$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{8-4\,\mathrm{sen}\,x+7\cos x}$

(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x+2\,\mathrm{sen}\,x+3}$

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{5-4\,\mathrm{sen}\,x+3\cos x}$

(h) $\displaystyle\int \frac{1-\mathrm{sen}\,x+\cos x}{1+\mathrm{sen}\,x-\cos x}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{a\,\mathrm{sen}\,x+b\cos x}\,dx$

(j) Resolver la integral $\displaystyle\int \frac{\tan x-1}{\tan x+1}dx$ de tres modos:

i. Haciendo el cambio $u=\tan x$; puede quedar una sencilla integral por fracciones simples.

ii. Reescribiendo $\tan x$ en función de $\mathrm{sen}\,x$ y $\cos x$.

iii. Notando que $\displaystyle\frac{\tan x-1}{\tan x+1}=\frac{\tan x-\tan(\pi/4)}{1+\tan x\tan(\pi/4)}$ y recordando una fórmula notable.

¿Porqué estos tres resultados son *aparentemente* diferentes? ¿Se está contradiciendo el T.F.C.?

129. *Sean a, b, c, d constantes dadas, tales que $ad - bc \neq 0$. Demostrar que $\exists\ A, B, C$ con la propiedad de que

$$\int \frac{a \operatorname{sen} x + b\cos x}{c \operatorname{sen} x + d\cos x} = Ax + B \operatorname{lgn} \mid c \operatorname{sen} x + d\cos x \mid + C$$

(*Sugerencia*: elegir A, B tales que $a \operatorname{sen} x + b\cos x \equiv A(c\operatorname{sen} x + d\cos x) + B(c\cos x - d\operatorname{sen} x)$). Usar este resultado para resolver las integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + 2\cos x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{3\operatorname{sen} x + 2\cos x}{2\operatorname{sen} x + 3\cos x}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x + 2\cos x}{(\operatorname{sen} x - 2\cos x)^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x - 3\cos x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{3\cos x - 4\operatorname{sen} x}{(3\operatorname{sen} x - 4\cos x)^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{3 + 5\tan x}$

130. *Repetir el ejercicio anterior para la integral

$$\int \frac{a\operatorname{sen} x + b\cos x + c}{\alpha\operatorname{sen} x + \beta\cos x + \gamma}\,dx = Ax + B\operatorname{lgn} \mid \alpha\operatorname{sen} x + \beta\cos x + \gamma \mid + C\int \frac{dx}{\alpha\operatorname{sen} x + \beta\cos x + \gamma}$$

y las integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x + 2\cos x - 3}{\operatorname{sen} x - 2\cos x + 3}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2} + \operatorname{sen} x + \cos x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{2\operatorname{sen} x + \cos x}{3\operatorname{sen} x + 4\cos x - 2}\,dx$

(*Sugerencia*: recuerde que la integral que aparece multiplicada por C se resuelve con el método del §128.)

131. ¿Se puede hacer en la integral $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt[3]{1 - x^2}\,dx$ el cambio $x = \operatorname{sen}\theta$?

132. *Esta pregunta expone un nuevo método de integración para ciertas funciones trigonométricas; las sustituciones hiperbólicas. Sea $I = \int \cos^m x \operatorname{sen}^n x\,dx$, donde m, n son enteros arbitrarios, tales que $m + n$ sea un número impar negativo. Entonces las sustituciones hiperbólicas tienen la forma

$$1^{\text{er}} \text{ cambio}: \quad \tan x = \operatorname{senh}\theta \implies \begin{cases} \sec^2 x\,dx = \cosh\theta\,d\theta \\ \sec x = \sqrt{1 + \tan^2 x} = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\theta} = \cosh\theta \end{cases}, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$$

$$2^{\text{do}} \text{ cambio}: \quad \operatorname{ctg} x = \operatorname{senh}\theta \implies \begin{cases} -\csc^2 x\,dx = \cosh\theta\,d\theta \\ \csc x = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\theta} = \cosh\theta \end{cases}, \quad 0 < x < \pi/2$$

Además, es útil tener en cuenta que $e^\theta = \cosh\theta + \operatorname{senh}\theta$, por lo que $\theta = \operatorname{lgn}(\cosh\theta + \operatorname{senh}\theta)$. Como se puede ver en los dos cambios posibles, la integral, que está en función de senos y cosenos, debe ser puesta en función de tangentes y secantes (en el primer cambio) o de cotangentes y cosecantes (en el segundo). Verificar que los cambios de variable presentados tienen sentido y usarlos para resolver las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \sec x\,dx$ (c) $\displaystyle\int \tan^2 x \sec x\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^6 x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \csc^3 x\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x}$ (f) $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^3 x \csc x\,dx$

◇ *Solución*: Resolvamos a modo ilustrativo el (b). Se trata de la integral $\int \cos^0 x \operatorname{sen}^{-3} x\,dx$, por lo que $m + n = -3$ y el

*Esta pregunta es la primera de las que aparecen en este capítulo como *métodos de integración alternativos*, es decir, sirven para resolver *solamente* las integrales del tipo considerado en esta pregunta. Como serán marcadas con * este tipo de integrales, que no aparecen en las guías de práctica regulares, el lector ocasional o el que no dispone de tiempo para resolver toda la guía, puede omitirlas.

método se aplica. Como ya está escrita en función de cosecantes, ensayamos con el segundo cambio, y haciendo todas las sustituciones mencionadas en el enunciado de este ejercicio, tenemos:

$$\begin{aligned}\int \csc^3 x\,dx &= -\int \csc x(-\csc^2 x\,dx) = -\int \csc x\,d(\operatorname{ctg} x) = -\int \cosh\theta(\cosh\theta\,d\theta) = -\int \cosh^2\theta\,d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int(1+\cosh 2\theta)\,d\theta = -\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\operatorname{senh}\theta\right)+C = -\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}\operatorname{senh}\theta\cosh\theta+C \\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{lgn}(\cosh\theta+\operatorname{senh}\theta)-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x\csc x+C = -\frac{1}{2}\operatorname{lgn}(\csc x+\operatorname{ctg} x)-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x\csc x+C \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{lgn}(\csc x-\operatorname{ctg} x)-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x\csc x+C\ ,\end{aligned}$$

y este ejemplo es suficiente para ver que el método usado es el más apropiado, ya que la integral que acabamos de resolver, al igual que la (a) y la (c) (cuando menos), se resuelven por integración por partes, método que está adelantado con respecto a este. ♢

133. Sea $f(x)$ una función monótona contínua y $f^{-1}(x)$ su inversa. Usar el método de integración por partes para demostrar que si $\int f(x)dx = F(x)$, entonces $\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$. Analizar los casos concretos de $f(x) = \mathrm{e}^x$, $f(x) = x^n$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$.

♢ *Solución*: Llamando $u = f^{-1}(x)$ y $dv = dx$, la fórmula de integración por partes arriba a

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int x(f^{-1})'(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int f(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int f(t)\ dt\ ,$$

donde $t = f^{-1}(x)$ es el cambio que nos permite aplicar la hipótesis. Si usamos esta fórmula para el caso $f(x) = \mathrm{e}^x$ y $f^{-1}(x) = \operatorname{lgn} x$, tenemos que $F(x) = \int \mathrm{e}^x\ dx = \mathrm{e}^x$:

$$\int \operatorname{lgn} x\,dx = x\operatorname{lgn} x - \mathrm{e}^{\operatorname{lgn} x} + C = x\operatorname{lgn} x - x + C\ ,$$

la cual el lector debería comprobar que es correcta, por supuesto, integrando por partes directamente. ♢

134. Demostrar la siguiente versión de la fórmula de integración por partes $\int uv\ dw = uvw - \int uw\ dv - \int vw\ du$, y usarla para resolver la integral $\int x\,\mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\,dx$ (nótese que esta fórmula es apropiada cuando u, v, w no tienen relación entre sí; cuando la resuelva, recuerde usar la versión normal cuando así sea necesario).

135. Demostrar la siguiente versión de la fórmula de integración por partes:

$$\int f^{(n)} g\,dx = f^{(n-1)}g - f^{(n-2)}g' + f^{(n-3)}g'' - \ldots + (-1)^n \int f g^{(n)}\,dx\ ,$$

donde $f^{(k)}$ denota la derivada k-ésima. Con este resultado, calcular las siguientes integrales:

(a) $\int (x^2-4x+5)\,\mathrm{e}^{2x}\ dx$ (b) $\int \mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen} 3x\,dx$ (c) $\int (x^2-3x-3)(\operatorname{lgn} x)^2\,dx$

136. Resolver nuevamente la integral $\int \sec^3 x\,dx$, notando que $\sec^3 x = (1+\tan^2 x)\sec x$ e integrando por partes.

137. (a) Demostrar que

$$\int \operatorname{arcsen} x\operatorname{lgn} x\,dx = \operatorname{lgn} x\left[x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}+1\right] - x\operatorname{arcsen} x - 2\sqrt{1-x^2} - \operatorname{lgn}\left|1-\sqrt{1-x^2}\right| + C\ ,$$

usando cualquiera de las elecciones $dv = \operatorname{arcsen} x$ ó $dv = \operatorname{lgn} x$. La idea de este ejercicio no es lo complicado, sino que lo distintas que son el arcoseno y el logaritmo obliga a que se hagan elecciones “forzadas” para dv, que a su vez se resuelven integrando por partes.

(b) Repetir la parte anterior para calcular la integral $\int \operatorname{lgn} x \operatorname{lgn}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\,dx$, usando $dv = \operatorname{lgn} x$.

138. Sean P_n un polinomio de grado n y a, b constantes. Demostrar la existencia de los polinomios Q_n, R_n (a coeficientes indeterminados) y las constantes A, B, C tales que

$$\begin{aligned}
\int P_n(x)\operatorname{sen} ax\,dx &= Q_n(x)\operatorname{sen} ax + R_n(x)\cos ax + C\ ,\\
\int P_n(x)\,\mathrm{e}^{bx}\,dx &= Q_n(x)\,\mathrm{e}^{bx} + C\ ,\\
\int P_n(x)\operatorname{lgn} x\,dx &= xQ_n(x)\operatorname{lgn} x + xR_n(x) + C\ ,\\
\int \mathrm{e}^{bx}\operatorname{sen} ax\,dx &= \mathrm{e}^{bx}(A\operatorname{sen} ax + B\cos ax) + C\ ,\\
\int \operatorname{sen} ax\cos bx\,dx &= A\operatorname{sen} ax\operatorname{sen} bx + B\cos ax\cos bx + C\ .
\end{aligned}$$

(*Sugerencia*: necesitará integración por partes y, de seguro, un poco de inducción). Una vez hecho esto, estas fórmulas se pueden aplicar a casos concretos, estableciendo la forma del resultado final (los polinomios se deben expresar con coeficientes indeterminados) y luego derivando miembro a miembro. Hágalo Ud.:

(a) $\int (x^2+3x+5)\cos 2x\,dx$
(b) $\int (x^2+2x+2)\,\mathrm{e}^x\,dx$
(c) $\int \mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen} 5x$
(d) $\int x^7\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$
(e) $\int \mathrm{e}^{ax}\cos^2 bx\,dx$
(f) $\int x\cos\sqrt{x}\,dx$
(g) $\int (x^2-1)\operatorname{lgn} x\,dx$
(h) $\int x(x^2+4)^3\operatorname{lgn}(x^2+4)\,dx$
(i) $\int x^{n-1}\operatorname{lgn} x\,dx$, $n\in\mathbf{N}$

139. Usar integración por partes para resolver las siguientes integrales:

(a) $\int x\sec x\tan x\,dx$
(b) $\int (x-\operatorname{sen} x)^3\,dx$
(c) $\int \cos^2\sqrt{x}\,dx$
(d) $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$
(e) $\int x\arctan(x+1)\,dx$
(f) $\int \dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{x+1}}\,dx$
(g) $\int \operatorname{arcsen}^2 x\,dx$
(h) $\int \sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x\,dx$
(i) $\int x(1+x^2)\operatorname{arcctg} x\,dx$
(j) $\int (x^2-3x)\operatorname{lgn}(x-1)\,dx$
(k) $\int \arctan\dfrac{x-1}{x+1}\,dx$
(l) $\int x\arccos\dfrac{1}{x}\,dx$
(m) $\int \left(\dfrac{\operatorname{lgn} x}{x}\right)^2 dx$
(n) $\int \operatorname{lgn}(1+x^2)\,dx$
(o) $\int \operatorname{lgn}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx$
(p) $\int \operatorname{sen}\operatorname{lgn} x\,dx$
(q) $\int \operatorname{lgn}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx$
(r) $\int (\mathrm{e}^x-\cos x)^2\,dx$
(s) $\int \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}\,dx$
(t) $\int \dfrac{x^5}{(x^3+1)^2}\,dx$
(u) $\int \dfrac{(3+x^2)x^3}{(1+x^2)^3}\,dx$
(v) $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx$
(w) $\int \operatorname{sen} mx\cos nx\,dx$
(x) $\int \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}\,dx$

(y) Sean $I = \int \mathrm{e}^{sx}\cos(tx)dx$ y $J = \int \mathrm{e}^{sx}\operatorname{sen}(tx)dx$. Demostrar que

$$tI + sJ = \mathrm{e}^{sx}\operatorname{sen} tx + C \quad , \quad sI - tJ = \mathrm{e}^{sx}\cos tx + C$$

(z) Demostrar por inducción la fórmula $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,t^n\,dt = n!\,\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$.

♢ *Solución*: Por el grado de complicación de los mismos, elegimos como ejemplos resueltos al (h), al (l) y al (u).

(h) Para el primero, notemos que $\operatorname{arcsen} x$ no tiene primitiva sencilla; de hecho, si $dv = \operatorname{arcsen} x\, dx$, v se calcula como una integral por partes. Parece entonces que $dv = \sqrt{1-x^2}\, dx$. Dejamos al lector la comprobación (via sustitución trigonométrica) que

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}\right) .$$

Sustituyendo esto y la elección $u = \operatorname{arcsen} x$ en la fórmula de integración por partes, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x\, dx &= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x\left(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}^2 x + x\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x\right) - \frac{1}{2}\int\left(\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}} + x\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}^2 x + x\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}^2 x + \frac{x^2}{2}\right) + C \\
&= \frac{1}{4}\operatorname{arcsen}^2 x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x - \frac{x^2}{4} + C .
\end{aligned}$$

Este ejemplo muestra que la elección de u y dv puede ser complicada y que la elección correcta de dv puede requerir, a su vez, otro método de integración.

(l) Para el segundo ejemplo, notemos primero que si

$$\arccos\frac{1}{x} = y \implies 1/x = \cos y \implies x = \sec y \implies \operatorname{arcsec} x = y \implies \arccos\frac{1}{x} = \operatorname{arcsec} x ,$$

por lo que evitamos calcular $du = d\left(\arccos\frac{1}{x}\right) = d(\operatorname{arcsec} x) = \dfrac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ por medio de la regla de la cadena. Usando esto y la elección $dv = x\, dx$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\int x\arccos\frac{1}{x}\, dx &= \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{|x|\sqrt{x^2-1}}\, dx = \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} \mp \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} = \frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x} - \operatorname{sgn}(x)\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} ,
\end{aligned}$$

donde $\operatorname{sgn}(x)$ es 1 si $x > 0$ ó -1 si $x < 0$. El uso de esta función nos evita el peligro de escribir $\pm$, ya que esto se hace cuando *hay dos resultados*, mientras que aquí hay uno solo, que cambia de signo en $x = 0$.

(u) En este tercer ejemplo, el subintegrando no parece tener nada que ver con el método que estamos estudiando. Pero precisamente integrar por partes es una de las herramientas más útiles del cálculo integral, ya que ayuda, como en este caso, a no resolver la integral por el método de fracciones simples, que está adelantado al orden de los métodos que hemos visto. Notando que en la fracción $\dfrac{(3+x^2)x^3}{(1+x^2)^3}$ el numerador se le disminuye el grado por integración y al numerador se le disminuye por derivación, tomamos $u = 3x^2 + x^4$ y $dv = \dfrac{x}{(1+x^2)^3}$:

$$\begin{aligned}
\int\frac{(3+x^2)x^3}{(1+x^2)^3}\, dx &= -\frac{1}{4}\frac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\int\frac{6x+4x^3}{(1+x^2)^2}\, dx = -\frac{3x^2+x^4}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\int\frac{2x(3+2x^2)}{(1+x^2)^2}\, dx \\
&\overset{*}{=} -\frac{3x^2+x^4}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\left(-\frac{3+2x^2}{1+x^2} + \int\frac{4x}{1+x^2}\, dx\right) \qquad \left[s = 3+2x^2\ ,\ dr = \frac{2x\, dx}{(1+x^2)^2}\right] \\
&= -\frac{3x^2+x^4}{4(1+x^2)^2} - \frac{3+2x^2}{4(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{lgn}(1+x^2) + C \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{lgn}(1+x^2) - \frac{3x^4+8x^2+3}{4(1+x^2)^2} + C ,
\end{aligned}$$

donde en el paso (*) aplicamos nuevamente integración por partes, haciendo allí una elección con otras letras que no sean u y dv para evitar confusión. En este ejemplo se vé la fuerza del método, ya que dos integraciones por partes nos ahorro dejar esta integral para el método de fracciones simples. Más aún, el resultado final queda simplificado casi por completo.

♢

140. Esta pregunta aclara la elección de $C=0$ en integración por partes.

(a) Suponiendo que las funciones f y g están ligadas por medio de la relación

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\ ,$$

demostrar que es válida la relación

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)\left[g(x)+C\right] - \int f'(x)\left[g(x)+C\right]\,dx\ .$$

(b) Resolvamos la integral $I = \displaystyle\int x\arctan x\,dx$ de dos modos:

i. Resolverla usando integración por partes y eligiendo $C=0$ en la parte anterior, para llegar a

$$I = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}\ .$$

ii. Repetir dicho procedimiento, pero ahora eligiendo $C=1/2$ para obtener $I = \dfrac{x^2+1}{2}\arctan x - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int dx$.

Terminar ambos cálculos para demostrar que $I = \dfrac{x^2+1}{2}\arctan x - \dfrac{x}{2} + K$. Esto muestra, con un ejemplo en concreto, que no es siempre necesario elegir $C=0$ en el cálculo de dv en integración por partes, ya que otro valor del mismo puede simplificar enormemente los cálculos.

(c) Rehacer la parte anterior para cada una de las siguientes integrales por partes, es decir, resolverlas por el método tradicional y tomar C arbitrariamente en cada caso; usar el valor de C dado para que la integral $-\displaystyle\int f'(x)\left[g(x)+C\right]\,dx$ resulte más fácil de calcular:

i. $\displaystyle\int \operatorname{lgn}(2x-5)\,dx$, usando $C=-5/2$

ii. $\displaystyle\int x\operatorname{lgn}\frac{x}{1-x^2}\,dx$, usando $C=-1/2$

iii. $\displaystyle\int x\arctan(2x+3)\,dx$, usando $C=-1$

iv. $\displaystyle\int x\operatorname{lgn}\frac{1-x}{1+x}\,dx$, usando $C=-1/2$

v. $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}\sqrt{x}\,dx$, usando $C=-1/2$

vi. $\displaystyle\int x\arctan\frac{1-x}{1+x}\,dx$, usando $C=1/2$

(d) ¿Por qué es indiferente el valor de C que se tome al calcular la integral $\displaystyle\int x\,e^{2x}\,dx$? (La idea de esta pregunta es que el lector observe que, en la parte anterior, todas las integrales que se resolvieron con un valor de C especial involucraban funciones no racionales cuya derivada si lo es.)

141. A estas alturas, el lector ya se habrá dado cuenta que hay ciertas integrales, todas ellas envolviendo subintegrandos exponenciales, trigonométricos e hiperbólicos, que se resuelven por despeje de la integral buscada cuando se integra por partes. Esta pregunta generaliza este resultado.

(a) Sean f, g funciones tales que cada una de ellas es proporcional a su segunda derivada, es decir, tales que $\exists\, h, k$ con $f''(x) = hf(x)$ y $g''(x) = kg(x)$. Usar integración por partes para demostrar que

$$\int f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{h-k}\left[f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\right]\ ,$$

siempre y cuando $h \neq k$.

(b) ¿Que ocurre en la parte anterior si $h=k$? (*Sugerencia*: si no lo vé todavía, intente con $f(x)=\operatorname{sen} x$ y $g(x)=\cos x$ y trate de resolver $\int fg\,dx$ como "si fuera" por partes).

(c) En vista que $(\mathrm{e}^{ax})'' = a^2\,\mathrm{e}^{ax}$, $(\operatorname{sen} bx)'' = -b^2 \operatorname{sen} bx$ y $(\cosh cx)'' = c^2 \cosh cx$, las siguientes fórmulas se pueden obtener integrando por partes ó por la fórmula de la parte (a). Hágalo Ud. de las dos formas para que se convenza que dá igual:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx &= \frac{1}{a^2+b^2}\left[a\,\mathrm{e}^{ax} \operatorname{sen} bx - b\,\mathrm{e}^{ax}\cos bx\right] + C\ , \\
\int \operatorname{sen} bx \cosh cx\, dx &= \frac{1}{b^2+c^2}\left[c \operatorname{senh} cx \operatorname{sen} bx - b\cosh cx \cos bx\right] + C\ , \\
\int \mathrm{e}^{ax} \cosh cx\, dx &= \frac{1}{a^2-c^2}\left[a\,\mathrm{e}^{ax} \cosh cx - c\,\mathrm{e}^{ax} \operatorname{senh} cx\right] + C\ .
\end{aligned}$$

Más aún, en la última de las tres vea lo qué ocurre si $a = c$. Como la fórmula dada tiene una división entre cero, es claro que no se puede integrar por partes en este caso, como ya se analizó en la parte (b). Remedie la situación cuando $a = c$ en dicha fórmula.

142. En cada uno de los siguientes casos se dá una integral por partes que debe ser tratada con cuidado; cada una constituye un caso especial del método antedicho. Si no consigue resolverlas de inmediato, siga la sugerencia dada:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}$; multiplique arriba y abajo por $\operatorname{sen} x$; note que $(x\cos x - \operatorname{sen} x)' = -x \operatorname{sen} x$, por lo que debe tomar $dv = \dfrac{x \operatorname{sen} x}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}$ y $u = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$.

(b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{lgn} x - 1}{\operatorname{lgn}^2 x} dx$; separe en dos integrales e integre por partes sólo la primera, haciendo $u = 1/\operatorname{lgn} x$ (note que se cancela la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{lgn} x}$, que de paso, no es resoluble).

(c) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(x+1)^2} dx$; $\dfrac{x\,\mathrm{e}^x}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1-1)\,\mathrm{e}^x}{(x+1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1} - \dfrac{\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}$ e integre la segunda fracción, haciendo el cambio $dv = -\dfrac{dx}{(x+1)^2}$.

(d) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\operatorname{arcsen} x}\, dx$; llamar I la integral y seguir los siguientes pasos:

i. hacer $u = \mathrm{e}^{\operatorname{arcsen} x}$;

ii. multiplicar arriba y abajo por $\sqrt{1-x^2}$ y hacer $dv = \dfrac{\mathrm{e}^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ y $u = \sqrt{1-x^2}$.

Ahora sumar ambos resultados y despejar I (note que si se restan estos resultados en vez de sumarlos, puede hallar también el valor de la integral $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{e}^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ sin mayor esfuerzo).

(e) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} \frac{x\cos^3 x - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$; separe la integral en dos por la resta del numerador; en la primera, tomar $dv = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\cos x$ y en la segunda, tomar $dv = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$.

(f) $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\,\mathrm{e}^x\, dx$; demostrar la identidad $\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan\dfrac{x}{2}\right)^2$ y desarrollar la integral según este polinomio trigonométrico (se cancelará la integral $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \tan\frac{x}{2}\, dx$, que se tampoco es resoluble).

♢ *Solución*: Resolvamos el (e). Siguiendo la sugerencia dada, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} \frac{x\cos^3 x - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx &= \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\cos x\, dx}_{dv} - \int \underbrace{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}_{s}\,\underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx}_{dt} = \int x\, d\left(\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\right) - \int \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\, d\left(\frac{1}{\cos x}\right) \\
&= \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}_{v} - \int \underbrace{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} - \underbrace{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}_{s}\,\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{t} + \int \underbrace{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\cos x}_{ds}\,\underbrace{\frac{dx}{\cos x}}_{t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x\,\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} - \int \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\,dx - \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}{\cos x} + \int \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\,dx \;=\; x\,\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} - \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}{\cos x} \\ &= \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\,(x - \sec x)\ . \end{aligned}$$

Nótese que la integral $\int \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}$ no es resoluble‡, pero no hay que resolverla, ya que se cancela cuando integramos por partes ambas integrales. Esta patología ocurre en este y en todos las partes de este ejercicio, por lo cual es considerado como especial, ya que el método de integración por partes **es el único** que detecta integrales no resolubles como parte de otras que si lo son. ♢

143. Otro de los más importantes usos de la integración por partes es establecer las llamadas *fórmulas de reducción*, que sirven para llevar integrales generales (esto es, dependientes de un entero n) a otras mas sencillas, reduciéndole el grado al integrando hasta las mas simple posible. En cada uno de los siguientes casos, si a es una constante *diferente* de cero, demostrar la fórmula de reducción y aplicarla a la resolución de la integral que la acompaña:

(a) $$I_{m,n} = \int x^m (ax+b)^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}(ax+b)^n + nb\,I_{m,n-1}}{m+n+1} \\ \dfrac{x^m(ax+b)^{n+1} + mb\,I_{m-1,n}}{a(m+n+1)} \end{cases} \quad ; \quad \text{calcular } I = \int x^7 (2x^2-5)^3\,dx$$

(b) $$I_m = \int x^m \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{(2m+3)a}\left[x^m(ax+b)^{3/2} - mb\,I_{m-1}\right] \quad ; \quad \text{calcular } I = \int x^3\sqrt{2x-1}\,dx$$

(c) $$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\,I_{n-1}\right] \quad ; \quad \text{calcular } I = \int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$$

(d) $$I_n = \int (ax^2+bx+c)^{n+1/2}\,dx = \frac{(2ax+b)(ax^2+bx+c)^{n+1/2}}{4a(n+1)} + \frac{(2n+1)(4ac-b^2)\,I_{n-1}}{8a(n+1)} \quad ; \quad \text{calcular } I = \int (x^2+2x)^{5/2}\,dx$$

(e) $$I_m = \int x^m \operatorname{sen} ax\,dx = \frac{m \operatorname{sen} ax - ax\cos ax}{a^2}x^{m-1} - \frac{m(m-1)}{a^2}\,I_{m-1} \quad ; \quad \text{calcular } I_2$$

(f) $$I_n = \int \cos^n ax = \frac{\operatorname{sen} ax \cos^{n-1} ax}{an} + \frac{n-1}{n}\,I_{n-2} \quad ; \quad \text{calcular } I_4 \text{ e } I_5$$

(g) $$I_n = \int x^n\,\mathrm{e}^{ax}\,dx = \frac{x^n\,\mathrm{e}^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\,I_{n-1} \quad ; \quad \text{calcular } I = \int x^3\,\mathrm{e}^{2x}\,dx$$

$$\text{calcular } I = \int x^3 \operatorname{lgn}^2 x\,dx$$

(h) $$I_n = \int \tanh^n ax\,dx = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{a(n-1)} + I_{n-2} \quad ; \quad \text{calcular } I = \int \left(\frac{\mathrm{e}^{4x}-1}{\mathrm{e}^{4x}+1}\right)^5 dx$$

(i) Sea n un entero positivo. Demostrar que $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$, donde (por definición) $0! = 1$ y $k! = k(k-1)(k-2)\ldots 2.1$.

♢ *Solución*: Resolvamos el último. Sea I_n la integral buscada. Entonces

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx \;=\; \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n-1}(1-x^2)\,dx \;=\; I_{n-1} - \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^{n-1}\,dx \\ &= I_{n-1} - \left(-\frac{x(1-x^2)^n}{2n}\Bigg]_{-1}^{1} + \frac{1}{2n}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx\right) \;=\; I_{n-1} - \frac{1}{2n}I_n \\ \Longrightarrow\ I_n &= \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} \;=\; \frac{2^2 n(n-1)}{(2n+1)(2n-1)}I_{n-2} \;=\; \cdots \;=\; \frac{2^n n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}I_0\ , \end{aligned}$$

donde hemos iterando la primera fórmula de la última linea. Notando que $I_0 = 2$, obtenemos (tras una ligera amplificación en los factoriales) la fórmula deseada. ♢

‡De este tipo de integrales hablaremos en el ejercicio §147.

144. Hallar el volúmen del sólido que se origina al girar la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{x}$, $x = \pi^2/4$, $x = \pi^2/9$ y el eje x, alrededor del eje y.

145. Se recuerda (a esto nos referimos a Algebra de Bachillerato) que toda fracción de la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $\operatorname{grd}(P) = m$ y $\operatorname{grd}(Q) = n$, tiene una descomposición en fracciones simples. Se puede demostrar (cosa que no está al alcance de esta guía) que el plan de ataque para las integrales $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ es la siguiente:

(I) Hacer la división polinómica de P/Q si $m \geq n$, de modo que $\dfrac{P}{Q} = C + \dfrac{R}{Q}$, donde $C(x)$ representa el cociente de dicha división y $R(x)$ su resto (más precisamente, con la condición $\operatorname{grd}(C) = m - n$ y $\operatorname{grd}(R) \leq n - 1$).

(II) Si $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$, con todos los a_i *distintos entre sí*, entonces la descomposición de R/Q tiene la forma

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}\ ,$$

para ciertas *constantes* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, que se pueden hallar de la siguiente forma:

A) Por simplificación de la suma de fracciones simples del lado derecho de la última ecuación, y posterior identificación de ambos numeradores, usando luego el *método de coeficientes indeterminados*.

B) Si se quiere evitar el sistema de ecuaciones del paso anterior, nótese que

$$\frac{(x - a_i)R(x)}{Q(x)} = \frac{x - a_i}{x - a_1}A_1 + \ldots + \frac{x - a_i}{x - a_{i-1}}A_{i-1} + A_i + \frac{x - a_i}{x - a_{i+1}}A_{i+1} + \ldots + \frac{x - a_i}{x - a_n}A_n\ ,$$

por lo que el lado derecho de esta ecuación es una constante cuando $x = a_i$ e igual a A_i, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Pero el lado izquierdo es una forma indeterminada polinómica de la forma $0/0$, la cual es fácil de resolver por cancelación del factor $(x - a_i)$:

$$\lim_{x\to a_i} \frac{(x - a_i)R(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to a_i} \frac{(x - a_i)R(x)}{(x - a_1)\ldots(x - a_i)\ldots(x - a_n)} = \frac{R(a_i)}{S(a_i)}\ ,$$

donde $S(x) = (x - a_1)\ldots(x - a_{i-1})(x - a_{i+1})\ldots(x - a_n)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Aquí lo único raro que puede pasar es que $R(a_i) = 0$, pero eso significa que $A_i = 0$, ya que, por hipótesis, $S(a_i) \neq 0$.

C) Si se quiere agilizar un poco más la búsqueda de los A_i, es interesante notar que la forma indeterminada del paso anterior se puede resolver por la Regla de L'Hôpital, de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} A_i &= \lim_{x\to a_i} \frac{[(x - a_i)R(x)]'}{Q'(x)} = \lim_{x\to a_i} \frac{R(x) + (x - a_i)R'(x)}{\sum_{j=1}^{n}(x - a_1)\ldots\overline{(x - a_j)}\ldots(x - a_n)} \\ &= \frac{R(a_i) + 0\cdot R'(a_i)}{S(a_i)} = \frac{R(a_i)}{S(a_i)}\ , \end{aligned}$$

donde la expresión en el denominador (a la que se le ha aplicado la regla del producto) es una suma de términos polinómicos de grado $n - 1$ y cada sumando carece del factor que tiene la barra. Como esta expresión consta de varios factores que se anulan cuando $x \to a_i$ menos uno de ellos (precisamente $S(x)$, cuando $j = i$ en la sumatoria), hemos demostrado que $A_i = \dfrac{R(a_i)}{Q'(a_i)}$ (cuidado: se parece a la Regla de L'Hôpital, sólo que aquí no se deriva el numerador).

(a) $\displaystyle\int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$ (g) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^3 + 1)(x^3 + 8)}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 37}{x^2 + x - 12}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 1}{x(x^4 - 5)(x^5 - 5x + 1)}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x}\,dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{1 - x^7}{x(1 + x^7)}\,dx$

III) Si $Q(x) = (x-a)^{n_1}(x-b)^{n_2}\dots(x-k)^{n_k}$, con $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ y las constantes $a, b, \dots, k$ todas *diferentes entre sí*, entonces la descomposición de R/Q tiene la forma

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_{n_1}}{(x-a)^{n_1}} + \frac{A_{n_1-1}}{(x-a)^{n_1-1}} + \dots + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_1}{x-a} + \dots\dots + \frac{K_{n_k}}{(x-k)^{n_k}} + \frac{K_{n_k-1}}{(x-k)^{n_k-1}} + \dots + \frac{K_1}{x-k} \ ,$$

donde todas las constantes mayúsculas se hallan por medio del método dado en (A).

(j) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$ (l) $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\,dx$ (n) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$

(k) $\displaystyle\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$ (m) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$ (o) $\displaystyle\int \frac{x^9}{(x^4-1)^2}\,dx$

(p) Hallar las condiciones sobre a, b, c para que la integral $\displaystyle\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$ represente una función racional, es decir, no contenga términos logarítmicos.

(q) Demostrar que la sustitución $u = \dfrac{x+a}{x+b}$ resuelve el problema del cálculo de la integral

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}\,dx \ ,$$

para todos $m, n \in \mathbf{N}$, y usar esta sustitución para hallar $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^2(x-3)^3}\,dx$.

IV) Si $Q(x) = (a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\dots(a_kx^2+b_kx+c_k)$, con $a_i \neq 0$, $b_i^2 - 4a_ic_i < 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, k$ y $2k = n$, entonces la descomposición de R/Q tiene la forma

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \dots + \frac{A_kx+B_k}{a_kx^2+b_kx+c_k} \ ,$$

donde nuevamente se hallan las constantes A_i y B_i por el método dado en (A), o por un artificio variante de éste:

D) Al integrar estos factores, hay que "forzar" a los numeradores a ser la "derivada interna" de los denominadores. Para evitar este trabajo adicional, se busca la descomposición de R/Q en la forma

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{C_1(2a_1x+b_1)+D_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{C_2(2a_2x+b_2)+D_2}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \dots + \frac{C_k(2a_kx+b_k)+D_k}{a_kx^2+b_kx+c_k} \ ,$$

donde se vé claramente que esta elección no contradice la descomposición natural, ya que se puede poner $C_i = \dfrac{A_i}{2a_i}$ y $D_i = B_i - C_ib_i$, sistemas compatibles por ser $a_i \neq 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

(r) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx$ (u) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$ (x) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$

(s) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$ (v) $\displaystyle\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$ (y) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

(t) $\displaystyle\int \frac{x}{x^8-1}\,dx$ (w) $\displaystyle\int \frac{2x+4}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$ (z) $\displaystyle\int \frac{x^2+10}{x^4+16x^2+100}\,dx$

V) Si $Q(x) = (ax^2+bx+c)^k$, donde $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$ y $2k = n$ (es suficiente considerar un solo factor, ya que si hay mas, por lo casos anteriores sabemos que aparecen muchos más sumandos), entonces la descomposición de R/Q es de la forma

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k} + \frac{A_{k-1}x+B_{k-1}}{(ax^2+bx+c)^{k-1}} + \dots + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} \ ,$$

donde ya se sabe como calcular los A_i y B_i, para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

(α) $\displaystyle\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$ (γ) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$ (ϵ) $\displaystyle\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}\,dx$

(β) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2(x^2+1)}$ (δ) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^3}$ (ζ) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$

(η) Deducir, si es necesario integrando por partes, una fórmula de recurrencia para la integral

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}\ , \quad a \neq 0\ ,\ b^2-4ac<0\ ,$$

y aplicar esta fórmula para calcular la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$ (*Sugerencia*: usar la identidad

$$4a(ax^2+bx+c) = (2ax+b)^2 + (4ac-b^2)\ )$$

VI) Finalmente, los siguientes son algunos “trucos” que pueden servir para aligerar un poco estos métodos, bastante prácticos en algunos casos:

(θ) Resolver las integrales $I_1 = \displaystyle\int \frac{x^2-x}{(x^2+1)(x+1)}\,dx$, $I_2 = \displaystyle\int \frac{x^2-2x+1}{x(x^2+1)}\,dx$ e $I_3 = \displaystyle\int \frac{x^4+x^2-x+1}{x^5+x^3}\,dx$ *sin hallar* las fracciones simples, sino manipulando la fracción para que queden integrales inmediatas.

(ι) Demostrar que todo polinomio de la forma

$$Q(x) = a_n x^{2n} + a_{n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1 x^{n+1} + a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\ ,$$

llamado *polinomio simétrico*, se puede factorizar haciendo previamente el cambio de variable $u = x+\dfrac{1}{x}$, y usar esta factorización para resolver las integrales

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1} \quad \text{y} \quad \int \frac{x^2+x+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx\ .$$

(κ) Resolver las integrales $I_1 = \displaystyle\int \frac{x^2}{x^4+10x^2+16}\,dx$ e $I_2 = \displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx$, notando que los subintegrandos *sólo dependen* de x^2, por lo que los numeradores de las fracciones simples son constantes (¿por qué?).

(λ) Consideremos $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{3x-1}{x^4-5x^2+6}$. En analogía con el truco usado en la parte anterior, el denominador tiene las factorizaciones posibles

$$q(x) = x^4-5x^2+6 = (x^2-2)(x^2-3) \text{ ó } q(x) = x^4-5x^2+6 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})\ .$$

La segunda factorización es especialmente incómoda por estar los coeficientes en $\mathbf{I} = \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, y el sistema de ecuaciones que se va a resolver tiene coeficientes irracionales. Sin embargo, si se usa la primera factorización, se deben tratar de hallar las fracciones simples de $p(x)/q(x)$ en analogía al caso complejo, **no importa** cuál sea la naturaleza de $p(x)$. Usar esto para comprobar que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = -\frac{3x-1}{x^2-2} + \frac{3x-1}{x^2-3}\ ,$$

y resolver la integral de $p(x)/q(x)$.

VII) *Método de Ostrogradski*: Según los cuatro casos de descomposición de fracciones simples que hemos visto, es claro que el que ofrece mayor dificultad de cálculos es el de raíces múltiples, especialmente si las hay complejas. En la mayoría de los textos rusos (como el citado en la bibliografía) aparece un método que permite predecir que en la integración de una fracción propia $R(x)/Q(x)$, donde $Q(x)$ tiene raíces múltiples, aparecen términos racionales y un solo término logarítmico (en el caso de raiz simple) y un solo término con tangente inversa (en el caso de raiz compleja). Esto permite reducir el cálculo de dicha integral a la de una función racional, pero donde el denominador **solo tiene raíces simples**. Resumimos todo esto como un teorema (sin demostración, por razones de espacio), y algún ejemplo resuelto.

Teorema 7.1. (Ostrogradski) Sean $R_k(x)$ y $Q_n(x)$ polinomios de grados $k \leq n-1$ y n, respectivamente. Si

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\beta_2}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s} \ ,$$

con $\alpha_r, \beta_s > 1$, $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i + 2\sum_{j=1}^{s}\beta_j = n$ y $p_j^2 - 4q_j < 0$, entonces existen polinomios $X(x)$ y $Y(x)$, a coeficientes indeterminados, tales que

$$\begin{aligned}\int \frac{R_k(x)}{Q_n(x)}\,dx &= \frac{X(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\dots(x-a_r)^{\alpha_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}} \\ &+ \int \frac{Y(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\dots(x^2+p_sx+q_s)}\,dx \ ,\end{aligned}$$

donde los grados de $X(x)$ y $Y(y)$ son de grado uno menos de los grados de los denominadores de las fracciones que ocupan.

(λ) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$ (ν) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$ (o) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$

(μ) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$ (ξ) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}$ (π) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8+x^6}$

♢ *Solución*: Para ejemplificar este método, resolvamos el (ν). El método de Ostrogradski nos permite escribir

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}{(x^2+1)^3} + \int \frac{Gx+H}{x^2+1}\,dx \ ,$$

ya que a partir del hecho de que $x^2+1 = (x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})$ no tiene raíces reales, y como $(x^2+1)^3$ es un polinomio de grado 6, el numerador de la primera fracción debe ser de grado 5. Además, x^2+1 es el polinomio de mínimo grado que divide a $(x^2+1)^4$, de modo que la segunda integral debe tener a x^2+1 como denominador, y a un polinomio de primer grado como numerador. Para hallar las constantes $A, B, \dots, H$ derivamos ambos miembros de la ecuación anterior para obtener

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x^2+1)^4} &= \frac{5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E}{(x^2+1)^3} - \frac{6x(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)}{(x^2+1)^4} + \frac{Gx+H}{x^2+1} \\ &= \frac{Gx^7+(H-A)x^6+(3G-2B)x^5+(5A-3C+3H)x^4+(4B-4D+3G)x^3}{(x^2+1)^4} \\ &+ \frac{(3C-5E+3H)x^2+(2D-6F+G)x+(E+H)}{(x^2+1)^4}\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& G \\ 0 &=& H-A \\ 0 &=& 3G-2B \\ 0 &=& 5A-3C+3H \\ 0 &=& 4B-4D+3G \\ 0 &=& 3C-5E+3H \\ 0 &=& 2D-6F+G \\ 1 &=& E+H \end{array}\right. \implies \begin{array}{c} B=D=F=G=0 \\ \left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& H-A \\ 0 &=& 5A-3C+3H \\ 0 &=& 3C-5E+3H \\ 1 &=& E+H \end{array}\right.\end{array} \implies \begin{array}{c} A=H=\dfrac{5}{16} \\ C=\dfrac{5}{6}\ ,\ E=\dfrac{11}{16}\end{array}$$

por lo que la solución de la integral viene dada por

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \frac{5x^5/16+5x^3/6+11x/16}{(x^2+1)^3} + \int \frac{5/16}{x^2+1}\,dx = \frac{15x^5+40x^3+33x}{48(x^2+1)^3} + \frac{5}{16}\arctan x + K \ .$$

Aunque el ejemplo no parezca corroborarlo, este método permite resolver más rápido el problema, ya que no hay que resolver sino integrales de funciones racionales con raíces simples. Claro está, si como en este caso el denominador tiene grado alto y además raíces complejas, el sistema al que se llega es de muchas incógnitas, pero siempre con soluciones fáciles de hallar. ♢

146. *Esta pregunta muestra algunos cambios de variable "exóticos", ya que las integrales que aparecen aquí son resolubles por los cambios que ya hemos visto, pero causando excesivo trabajo, mientras que estos nuevos métodos están especialmente diseñados para estas integrales.

1) *Generalización del cambio* $u = \tan(x/2)$: sea $I = \int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$ una integral racional en las variables $\operatorname{sen} x$, $\cos x$. Resolver las siguientes integrales con los cambios de variable de la tabla adjunta:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\cos x)\operatorname{sen} x}$

(b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

Si en la integral ocurre que:	hacer:
$R(-\operatorname{sen} x, \cos x) \equiv -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$u = \cos x$
$R(\operatorname{sen} x, -\cos x) \equiv -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$u = \operatorname{sen} x$
$R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) \equiv R(\operatorname{sen} x, \cos x)$	$u = \tan x$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+\tan x + 4\operatorname{ctg} x}$ (e) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\, dx$ (g) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}\, dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x + 5\operatorname{sen}^2 x}$ (f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1+\operatorname{sen}^4 x}\, dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\operatorname{sen}^2 x + b^2\cos^2 x}$

2) *Sustituciones Hiperbólicas*: sea $I = \int R(\sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$, tal que se conoce la factorización en binomios lineales del trinomio de segundo grado. Resolver las siguientes integrales con los cambios de variable dados en la tabla adjunta:

(i) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$

(j) $\displaystyle\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\, dx$

Factorización del subintegrando:	Cambio de variable:
$ax^2+bx+c = a(x+x_1)(x+x_2)$	$x+x_1 = (x_2-x_1)\operatorname{senh}^2 u$
$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x_2-x)$	$x-x_1 = (x_2-x_1)\tanh^2 u$
$ax^2+bx+c = a(x+x_1)(x_2-x)$	$x+x_1 = (x_2+x_1)\operatorname{sech}^2 u$

(k) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$ (l) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$ (m) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\, dx$ (n) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4-2x^2-3}}\, dx$

3) *Integrales de Tchebichev*: sea $I = \int x^m\,(a+bx^n)^p\; dx$, con $m = a/b$, $n = c/d$ y $p = r/s$ números racionales. Algunas de estas integrales **no son resolubles** en términos de funciones elementales, pero las *condiciones de Tchebichev*, mostradas en la tabla adjunta, dan las posibles resoluciones de este tipo de integrales, complicadas por la forma de los radicales:

(o) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

(p) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}\, dx$

(q) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

Condición sobre m, n, p:	Cambio de variable:
p es un número entero	$x = z^{\text{m.c.m.}(b,d)}$
$\dfrac{m+1}{n}$ es un número entero	$a+bx^n = z^s$
$\dfrac{m+1}{n}+p$ es un número entero	$ax^{-n}+b = z^s$

(r) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$ (s) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$ (t) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^5}}$ (u) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$

♢ *Solución*: Otra vez es conveniente tomar tres ejemplos, uno de cada tipo; el (d), el (k) y el (t).

(d) Como la sustitución formal de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ por $-\operatorname{sen} x$ y $-\cos x$, respectivamente, deja invariante la fración, usamos el cambio $u = \tan x$. Para que este cambio se vea más claro en el subintegrando, es necesario hacer unas ligeras modificaciones:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\operatorname{sen}^2 x} &= \int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sec^2 x(4-3\cos^2 x+5\operatorname{sen}^2 x)} = \int \frac{\sec^2 x}{4\sec^2 x - 3 + 5\tan^2 x}\, dx \\
&= \int \frac{\sec^2 x}{4+4\tan^2 x - 3 + 5\tan^2 x}\, dx = \int \frac{d(tanx)}{1+9\tan^2 x} = \int \frac{du}{1+9u^2} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{d(3u)}{1+(3u)^2} = \frac{1}{3}\arctan 3u + C = \frac{1}{3}\arctan(3\tan x) + C\ .
\end{aligned}$$

Así, este cambio evita fracciones racionales con denominadores complicados, como los que se hubieran conseguido si se hace el cambio $u = \tan(x/2)$.

(k) Como el binomio de segundo grado del denominador ya está factorizado en la forma $a(x+x_1)(x+x_2)$ con $a = 1$, $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$, usamos el primer cambio de la tabla: $x - 1 = (3-(-1))\,\mathrm{senh}^2 u = 4\,\mathrm{senh}^2 u$. Así, $dx = 8\,\mathrm{senh}\, u \cosh u\, du$ y $x + 3 = (x-1)+4 = 4\,\mathrm{senh}^2 u + 4 = 4\cosh^2 u$. Juntando todos estos cambios en la integral en cuestión, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)} &= \int \frac{8\,\mathrm{senh}\, u\cosh u}{(4\,\mathrm{senh}^2 u)(4\cosh^2 u)}\,du = \int \frac{du}{2\,\mathrm{senh}\, u\cosh u} = \int \frac{du}{\mathrm{senh}\, 2u} \\
&= \int \mathrm{csch}\, 2u\, du = -\frac{1}{2}\int \frac{-\mathrm{csch}^2 2u - \mathrm{csch}\, 2u\, \mathrm{ctgh}\, 2u}{\mathrm{csch}\, 2u + \mathrm{ctgh}\, 2u} d(2u) \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{d(\mathrm{csch}\, 2u + \mathrm{ctgh}\, 2u)}{\mathrm{csch}\, 2u + \mathrm{ctgh}\, 2u} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{lgn}\,|\mathrm{csch}\, 2u + \mathrm{ctgh}\, 2u| + C \\
&= -\frac{1}{2}\,\mathrm{lgn}\left|\frac{1+\cosh 2u}{\mathrm{senh}\, 2u}\right| + C = -\frac{1}{2}\,\mathrm{lgn}\,|\tanh u| + C \\
&= -\frac{1}{2}\,\mathrm{lgn}\left|\frac{\mathrm{senh}\, u}{\cosh u}\right| + C = -\frac{1}{2}\,\mathrm{lgn}\left|\frac{\mathrm{senh}\, u}{\sqrt{1+\mathrm{senh}^2 u}}\right| + C \\
&= \mathrm{lgn}\left|\frac{1+\mathrm{senh}^2 u}{\mathrm{senh}^2 u}\right| + C = \mathrm{lgn}\left|\frac{1+(x-1)/4}{(x-1)/4}\right| + C = \mathrm{lgn}\left|\frac{x+3}{x-1}\right| + C
\end{aligned}$$

Se vé de este ejemplo que el cambio hiperbólico es suficientemente eficiente, pero se requiere de un manejo extraordinario de las identidades hiperbólicas para usarlo con soltura.

(t) El subintegrando se puede escribir como $x^{-2}(2+x^3)^{-5/3}$, es decir, $m = -2$, $n = 3$ y $p = -5/3$. Como $p = -5/3$ y $(m+1)/n = -1/3$ no son enteros, las dos primeras condiciones fallan. Pero la tercera vale, ya que $\dfrac{m+1}{n} + p = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{3} = -2$, por lo que hacemos el cambio de variable $2x^{-3} + 1 = z^3$. Entonces

$$-6x^{-4}\,dx = 3z^2\,dz \ \text{ y } \ x^3 = 2/(z^3-1)\ .$$

Para que todos estos cambios se vean sustituíbles, acomodamos un poco la integral previamente:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}} &= \int \frac{dx}{x^2 x^5(2x^{-3}+1)^{5/3}} = \int \frac{dx}{x^7(2x^{-3}+1)^{5/3}} = -\frac{1}{6}\int \frac{-6x^{-4}\,dx}{x^3(2x^{-3}+1)^{5/3}} \\
&= -\frac{1}{6}\int \frac{3z^2\,dz}{2z^5/(z^3-1)} = -\frac{1}{4}\int \frac{z^5-z^2}{z^5}\,dz = -\frac{1}{4}\left[\int dz - \int \frac{dz}{z^3}\right] \\
&= -\frac{1}{4}\left(z + \frac{1}{2z^2}\right) + C = C - \frac{2z^3+1}{8z^2} = C - \frac{4x^{-3}+3}{8(2x^{-3}+1)^{2/3}} \\
&= C - \frac{4+3x^3}{8x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}\ ,
\end{aligned}$$

y otra vez se necesita, más que ser un experto con integrales, cierta habilidad con los exponentes y los cambios de variable, especialmente a la hora de devolverlos.

$\diamondsuit$

147. En casi todas las ramas de las Ciencias e Ingeniería, se usan integrales notables con bastante frecuencia; la suficiente como para que uno quiera poder resolverlas. Hasta ahora, la gran mayoría de las integrales que se han propuesto a lo largo de esta guía han sido resolubles, y el lector poría pensar que esto implica necesariamente que **todas** las integrales (indefinidas o nó) se deben poder resolver en términos algebráicos. Pero casi nunca es este el caso, como sucede con

$$I_1 = \int \mathrm{e}^{-x^2}\ dx\ \ ,\ \ I_2 = \int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\ \ ,\ \ I_3 = \int \mathrm{sen}\, x^2\, dx\ \ ,\ \ I_4 = \int \frac{\mathrm{sen}\, x}{x}\, dx\ ,$$

llamadas *de Cauchy*, *exponencial integral*, *de Fresnel* y *seno integral*. Con estas integrales y usando cambios de variable y/o métodos de integración, demostrar que las siguientes **no son integrables**:

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ (e) $\displaystyle\int x\,e^{2x-x^2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int \operatorname{lgn}\operatorname{lgn} x\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{e^{x}}{x^2+x-2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{lgn} x}$ (f) $\displaystyle\int x\,e^{-x^2}\operatorname{lgn} x\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{e^x-\operatorname{sen} x}{(x-\pi)^2}\,dx$

148. Supongamos que se conoce el valor numérico de la integral $A=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+1}$ (la cual, por lo que vimos en la pregunta anterior, no se puede calcular en términos de funciones elementales). Expresar los valores de las siguientes integrales en términos de A:

(a) $I_1=\displaystyle\int_{a-1}^{a} \frac{e^{-t}}{t-a-1}\,dt$ (b) $I_2=\displaystyle\int_0^1 \frac{t\,e^{t^2}}{t^2+1}\,dt$ (c) $I_3=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{(t+1)^2}\,dt$ (d) $I_4=\displaystyle\int_0^1 e^t\operatorname{lgn}(t+1)\,dt$

149. Finalmente, resolver por cualquier método anteriormente visto, las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{3.2^x-2.3^x}{6^x}\,dx$ (g) $\displaystyle\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx$ (m) $\displaystyle\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (s) $\displaystyle\int x\operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$ (n) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{lgn}\operatorname{sen} x}\,dx$ (t) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\displaystyle\int (x-1)^2\cosh 2x\,dx$ (i) $\displaystyle\int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)dx$ (o) $\displaystyle\int e^{2x^2+\operatorname{lgn} x}\,dx$ (u) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}\,dx$ (j) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-6e^x+13}\,dx$ (p) $\displaystyle\int \frac{1+\tan x}{\operatorname{sen} 2x}\,dx$ (v) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} 2x}$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$ (k) $\displaystyle\int (2x+3)\arccos(2x-3)\,dx$ (q) $\displaystyle\int a^{mx}b^{nx}\,dx$ (w) $\displaystyle\int x\operatorname{sen}^2 x\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{lgn} x}{x(1-\operatorname{lgn}^2 x)}\,dx$ (l) $\displaystyle\int_0^{\operatorname{arcsen} a} \frac{a\operatorname{sen} x+\cos x}{a^2+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$ (r) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx$ (x) $\displaystyle\int \cos^2\operatorname{lgn} x\,dx$

(y) Hallar la relacion $\dfrac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{x^2\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{x\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx}$ (*Sugerencia*: no intente calcular la integral del denominador; en la del numerador haga el cambio $x=2\pi-u$).

(z) Dada $I=\displaystyle\int (ax^2+b)\left(\frac{\arctan x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2-1}\operatorname{lgn}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)dx$,

i. hallar las condiciones sobre a y b para que I sea resoluble *sin* integración por partes;

ii. resolver I cuando $b=-a$.

(α) Demostrar que $\displaystyle\int \frac{\alpha\cos x+\beta\operatorname{sen} x+\gamma}{(1-\delta\cos x)^2}\,dx$ es una función racional (o sea, sin logaritmos) de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ si y sólo si $\alpha\delta+\gamma=0$. Con esta condición, resolver esta integral. (*Sugerencia*: haga $u=\tan(x/2)$.)

(β) Si $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, demostrar que $f(a)+f(b)=f\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$.

(γ) Demostrar que la integral $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d}\right)dx$ puede ser reducida a la integral de una función racional usando el cambio de variable $4x=-\dfrac{b}{a}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2-\dfrac{d}{c}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)^2$.

(δ) Usando integración por partes, demostrar que si $I_{m,n}=\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n$ (siendo $m,n\in\mathbf{N}$), entonces es válida la relación $(m+n+1)I_{m,n}=nI_{m,n-1}$, y deducir que $I_{m,n}=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

150. Marcar sólo una de las alternativas en las siguientes preguntas:

(I) ¿Cuál es el valor de $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$?

a. 1 b. -1 c. $\sqrt{2}$ d. $1/\sqrt{2}$ e. $1/2\sqrt{2}$

(II) El valor de $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{e}^{-x^3}\,dx$ es:

a. $-\dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-1}$ b. $\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{3\mathrm{e}}$ c. $\dfrac{\mathrm{e}-1}{3\mathrm{e}}$ d. $-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}$ e. $\dfrac{3x^2}{\mathrm{e}}$

(III) El valor de $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} x^2 \operatorname{sen} x\,dx$ es:

a. $\pi-1$ b. $\pi-2$ c. $\dfrac{3\pi}{2}$ d. $\dfrac{\pi}{2}$ e. π

(IV) El valor de $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\operatorname{lgn} x}}$ es:

a. e^3 b. $\dfrac{\mathrm{e}+1}{2}$ c. e^2-1 d. 2 e. 1

(V) Una solución de la integral $\displaystyle\int \frac{x}{\mathrm{e}^x}\,dx$ es:

a. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ b. $\dfrac{2x}{\mathrm{e}^x}$ c. $\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$ d. e^x+1 e. $-\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}$

(VI) El valor de $\displaystyle\int \frac{dx}{\csc 2x - \operatorname{ctg} 2x}$ es:

a. $\frac{1}{2}\operatorname{lgn}|\cos x| + C$ c. $2\operatorname{lgn}|\operatorname{sen} x| + C$ e. $\operatorname{lgn}|\csc x - \operatorname{ctg} x| + C$
b. $\frac{1}{2}\operatorname{lgn}(2\cos^2 x) + C$ d. $\operatorname{lgn}|\operatorname{sen} x| + C$

(VII) Al descomponer la función racional $\dfrac{2x^3-x^2+4x+1}{x^4+x^2-2}$ en fracciones parciales, se obtiene:

a. $\dfrac{x}{x^2+2}+\dfrac{2x}{x^2-2}$ c. $\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+2}$ e. $-\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2-2}$
b. $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{x}{x^2-2}$ d. $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x^2+2}$

(VIII) Al descomponer $f(x)=\dfrac{4x^3-3x^2+5x-2}{(x^2-x)^2}$ en fracciones simples se obtiene:

a. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{(x-1)^2}$ c. $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{(x-1)^2}$ e. $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$
b. $-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{(x-1)^2}$ d. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{(x-1)^2}$

(IX) El valor de $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{4x^3-3x^2+5x-2}{(x^2-x)^2}\,dx$ es:

a. $\dfrac{5}{3}+\operatorname{lgn}12$ b. $\dfrac{13}{3}+\operatorname{lgn}12$ c. $\dfrac{5}{3}+\operatorname{lgn}22$ d. $\dfrac{5}{3}+\operatorname{lgn}48$ e. $\dfrac{3}{5}+\operatorname{lgn}12$

(X) Una primitiva de la función racional $f(x)=\dfrac{2x^3}{(x^2+1)^2}$ es:

a. $\operatorname{lgn}(x^2+1)+\dfrac{1}{x^2+1}+C$ c. $\operatorname{lgn}\left|\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right|+C$ e. $\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\left|\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right|+C$
b. $\operatorname{lgn}(x^2-1)+\dfrac{1}{x^2+1}+C$ d. $\dfrac{(x^2+1)^2+1}{x^2+1}+C$

(XI) Para calcular $\displaystyle\int_{0}^{a}(a^2-x^2)^n\,dx$ (n número natural) se descompone en dos integrales usando

$$(a^2-x^2)^n = (a^2-x^2)^{n-1}(a^2-x^2) = a^2(a^2-x^2)^{n-1} - x^2(a^2-x^2)^{n-1}\ .$$

Integrando la segunda integral obtenida, por partes, se obtiene la ley de recurrencia:

a. $I_n = a\dfrac{2n+1}{n-1}I_{n-1}$ c. $I_n = a^2\dfrac{n+a}{2n+1}I_{n-1} + aI_{n-2}$ e. $I_n = a^2\dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1}$

b. $I_n = a^2\dfrac{n+1}{2n+1}I_{n-1}$ d. $I_n = naI_{n-1} + \dfrac{n}{2n+1}I_{n-2}$

(XII) Si $n \neq -1$, una primitiva de $f(x) = x^n \operatorname{lgn} ax$ es:

a. $\dfrac{x^2}{n}\operatorname{lgn} ax - \dfrac{x^{n+1}}{a^2(n+1)}$ c. $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{lgn} ax - \dfrac{x^{n+1}}{a^2(n+1)^2}$ e. $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{lgn} ax - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$

b. $\dfrac{x^2}{n}\operatorname{lgn} ax - \dfrac{x^{n+1}}{a(n+1)}$ d. $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{lgn} ax - \dfrac{x^{n+1}}{a(n+1)^2}$

(XIII) Si $\displaystyle\int x^n \cos x\, dx = x^n \operatorname{sen} x - \int M(n,x)\, dx$, entonces $M(n,x)$ es igual a:

a. $x^{n-2}\cos x$ b. $nx^{n-1}\operatorname{sen} x$ c. $x^n \operatorname{sen} x$ d. $x^{n-1}\cos x$ e. $nx^{n-1}\cos x$

(XIV) Una primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ es:

a. $\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\left|\dfrac{x^2+1}{x-1}\right|$ c. $\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} x + \dfrac{x^2}{1+x^2}\right)$ e. $\dfrac{1}{2}\left(\arctan x + \dfrac{x}{1+x^2}\right)$

b. $\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\left|\dfrac{x-1}{x^2+1}\right|$ d. $\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{arcctg} x - \dfrac{x}{1+x^2}\right)$

(XV) Una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x + \cos x - 2}$ es:

a. $\dfrac{1}{4}\operatorname{lgn}\dfrac{3-\cos x}{\cos x+1}$ c. $\dfrac{1}{3}\operatorname{lgn}\dfrac{2+\cos x}{\cos x-1}$ e. $\dfrac{1}{3}\operatorname{lgn}\dfrac{2-\cos x}{\cos x+1}$

b. $\dfrac{2}{3}\operatorname{lgn}\dfrac{2-\cos x}{\cos x+3}$ d. $\dfrac{1}{4}\operatorname{lgn}\dfrac{3+\cos x}{\cos x+1}$

(XVI) Una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$ es:

a. $\tan\left(\dfrac{x}{2}-1\right)+C$ c. $\operatorname{lgn}\left|\dfrac{\tan(x/2)+1}{\tan(x/2)-1}\right|+C$ d. $\operatorname{lgn}\left|\tan\dfrac{x}{2}-1\right|+C$

b. $\tan\left(\dfrac{x}{2}+1\right)+C$ e. $\operatorname{lgn}\left|\tan\dfrac{x}{2}+1\right|+C$

(XVII) Una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x+2)\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ es:

a. $\mathrm{e}^x - \operatorname{lgn}(\mathrm{e}^x+1)+C$ c. $\mathrm{e}^x+1+\operatorname{lgn}\mathrm{e}^x+C$ e. $\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\left|\dfrac{\mathrm{e}^x+2}{\mathrm{e}^x+1}\right|+C$

b. $\mathrm{e}^x + \operatorname{lgn}(\mathrm{e}^x+1)+C$ d. $\mathrm{e}^x(\operatorname{lgn}\mathrm{e}^x - \operatorname{lgn} 2)+C$

(XVIII) Una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)\sqrt{x+2}}$ es:

a. $\dfrac{1}{4}\operatorname{lgn}\left|\sqrt{x+2}-2\right|+C$ c. $\dfrac{1}{4}\operatorname{lgn}\left|\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{\sqrt{x-2}+2}\right|+C$ d. $\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\left|\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}\right|+C$

b. $\dfrac{1}{4}\operatorname{lgn}\left|\dfrac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}-2}\right|+C$ e. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}+C$

8 Integrales Impropias

Como último tópico del Cálculo Integral, exponemos integrales impropias.

No siempre es cierto que las integrales de la forma $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ o $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ si f es continua en $[a,\infty)$ y g no es continua en $c \in [a,b]$, existen o se pueden calcular. En cualquier caso, adoptaremos la definiciones

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx\ ,\quad \int_a^b g(x)\,dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t g(x)\,dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b g(x)\,dx\ ,$$

y las integrales del miembro izquierdo de cada ecuación se dirán *convergentes* si los límites del miembro derecho existen (es decir, son finitos). En caso contrario, se dirán *divergentes*.

Comencemos con integrales infinitas.

150. Analizar la convergencia de las siguientes integrales

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$

(b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\operatorname{lgn} x}{x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty x\,e^{-x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty x^3\,e^{-x^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

(i) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$

(j) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$

(k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\operatorname{lgn} x}{(1+x^2)^2}\,dx$

(l) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\arctan x}{1+x^2}\,dx$

♢ *Solución*: Miremos la solución del (e) y del (i).

(e) Notando primero que $x^3 = x\cdot x^2$, y haciendo el cambio $u = x^2$ (junto con los límites de integración), tenemos que la integral resultante es por partes:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^3\,e^{-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2\,e^{-x^2}\,d(x^2) = \frac{1}{2}\int_0^\infty u\,e^{-u}\,du = \frac{1}{2}\left(-u\,e^{-u}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u}\,du\right)\\
&\overset{*}{=} \frac{1}{2}\left(0\,e^0 - \lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^b} - e^{-u}\Big]_0^\infty\right) \overset{**}{=} \frac{1}{2}\left(-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^b} + 1 - \lim_{b\to\infty} e^{-b}\right) = \frac{1}{2}(0+1+0)\\
&= \frac{1}{2}\,,
\end{aligned}$$

por lo que la integral es convergente (al valor $1/2$). En el paso (*) es necesario escribir $b\,e^{-b}$ como un cociente, ya que tiene la forma indeterminada $0\cdot\infty$, para poder aplicar la regla de L'Hôpital en el paso (**).

(i) Se reconoce como una integral de fracciones simples, pero los trucos de sumar y restar lograrán una resolución más rápida:

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2} &= \frac{1}{3}\int_2^\infty \frac{3}{(x+2)(x-1)}\,dx = \frac{1}{3}\int_2^\infty \frac{x+2+1-x}{(x+2)(x-1)}\,dx = \frac{1}{3}\int_2^\infty \left(\frac{dx}{x-1} - \frac{dx}{x+2}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\operatorname{lgn}|x-1|\Big]_2^\infty - \operatorname{lgn}|x+2|\Big]_2^\infty\right) = \frac{1}{3}\left(\lim_{b\to\infty}\operatorname{lgn}\left|\frac{b-1}{b+2}\right| - \operatorname{lgn}\frac{2-1}{2+2}\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\operatorname{lgn}\left(\lim_{b\to\infty}\frac{b-1}{b+2}\right) - \operatorname{lgn}\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(\operatorname{lgn}1 - \operatorname{lgn}\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\operatorname{lgn}4\,.
\end{aligned}$$

En este caso, escribir la resta de logaritmos como el logaritmo del cociente no es un lujo de simplificación, sino una necesidad, ya que de otro modo se hubiera presentado la indeterminación $\operatorname{lgn}\infty - \operatorname{lgn}\infty$, la cual hay que calcularla como $\operatorname{lgn}(\infty/\infty)$ (claro está, usando la continuidad del logaritmo), resultando convergente esta integral.

♢

151. Usar fórmulas de reducción para analizar la convergencia de la integrales

(a) $\displaystyle\int_0^\infty x^n\,e^{-x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\cosh^{n+1} x}$

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)\dots(x+n)}$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+2x+2)^n}$

152. Se define la *transformada de Laplace* de una función f integrable como $\mathcal{L}_s(f(x)) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-sx}\,f(x)\,dx$.

(a) Demostrar las siguientes propiedades de la transformada de Laplace

i. $\mathcal{L}_s(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha\mathcal{L}_s(f(x)) + \beta\mathcal{L}_s(g(x))$

ii. $\mathcal{L}_s\left(\dfrac{d}{dx}f(x)\right) = s\mathcal{L}_s(f(x)) - f(0)$

iii. $\mathcal{L}_s(e^{ax}\,f(x)) = \mathcal{L}_{s+a}(f(x))$

iv. $\mathcal{L}_s(f(at)) = \dfrac{1}{a}\mathcal{L}_{s/a}(f(x))$

(b) Hallar las tranformadas de las siguientes funciones:

i. $\mathcal{L}_s(\mathrm{e}^{ax})$ ii. $\mathcal{L}_s(\operatorname{sen} ax)$ iii. $\mathcal{L}_s(\cosh ax)$ iv. $\mathcal{L}_s(x^n)$

153. Hallar el área acotada entre la gráfica de $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ y su asíntota.

154. Calcular el límite $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\, dt}$.

155. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, usando el cambio de variable $x + 1/x = u$.

♢ *Solución*: Este cambio obliga a que $(1-1/x^2)\,dx = du$ y $x^2 + 1/x^2 + = (x+1/x)^2 - 2 = u^2 - 2$. Además, los límites cambian de 1 a 2 y de 0 a ∞. Como la integral pedida se puede escribir en función de $x + 1/x$, el cambio funciona, y tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} &= \int_0^1 \frac{1/x^2-1}{1/x+x}\frac{dx}{\sqrt{1/x^2+x^2}} = \int_\infty^2 \frac{-du}{u\sqrt{u^2-2}} = \int_2^\infty \frac{u}{u^2\sqrt{u^2-2}}\,du \\
&\overset{*}{=} \int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{t}{(t^2+2)t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\bigg]_{\sqrt{2}}^\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lim_{b\to\infty}\arctan\frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\,,
\end{aligned}$$

donde en el paso (*) usamos el cambio de variable $t^2 = u^2 - 2$. ♢

156. Sea $B = \{\, x \in (0,\infty) \mid \operatorname{sen} x > 0 \,\}$. Usando integración por partes, hallar el valor de $\displaystyle\int_B \mathrm{e}^{-x/2}\,\frac{|\operatorname{sen} x - \cos x|}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx$.

157. Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \mathrm{e}^{-1}$ (*Sugerencia*: llamar L al límite y aplicar logaritmos a ambos miembros; resultará la suma de Riemann correspondiente a $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{lgn} x\,dx$).

158. Sea f continua en $[x_0,\infty)$ tal que $|f'(x)| < M$ para todo $x \geq x_0$ y tal que $\displaystyle\int_{x_0}^\infty |f(x)|\,dx$ es convergente. Demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ (*Sugerencia*: examinar la integral $\displaystyle\int_{x_0}^\infty f(x)f'(x)\,dx$).

159. Hallar los valores de m, n, k para que las siguientes integrales sean convergentes

(a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^k \operatorname{lgn} x}$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m}{1+x^n}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{mx+nx^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x(\operatorname{lgn} x)^k}$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{k}{x+2} - \frac{4x}{3x^2+2}\right)$ (f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2-1}{x^{n+1}-x^n}\,dx$

160. Este ejercicio es parecido al §147; sean $a, b > 0$ y $n \in \mathbf{N}$. Suponer válidos los resultados

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ ,\quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ ,$$

para demostrar que las siguientes integrales son convergentes y hallar su valor:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos^3 x}{x-\pi/2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2\,\mathrm{e}^{2bx-x^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax\cos bx}{x}\,dx$ (i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2}\,dx$

Para terminar la guía, los restantes ejercicios se refieren a integrales impropias con discontinuidades en el intervalo de integración. Se advierte que las integrales presentadas en este punto pueden ser infinitas, además de impropias de discontinuidad, sólo para aprovechar un repaso del punto anterior.

161. Analizar la convergencia de las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{lgn} x\, dx$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2-\sqrt{1-x^2}}$ (g) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \operatorname{lgn}^2 x}$ (j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{lgn} \cos x\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^3}\, dx$ (e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{lgn}(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ (h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+x^3}{x^4}\, dx$ (k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(x-1)}{(x-1)^{4/3}}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^3}\, dx$ (f) $\displaystyle\int_3^5 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$ (i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\, dx$ (l) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(x^2-2)\, dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$

162. Demostrar que existe $x \in (\mathrm{e}^{-1}, 1)$ tal que $\displaystyle\int_0^x \operatorname{lgn} x\, dx = \operatorname{lgn}\left(\int_0^x x\, dx\right)$ (*Sugerencia*: teorema de Bolzano).

163. Calcular la integral $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\, dx$ por medio del cambio $x - 1/x = t$.

164. Demostrar que la *función gamma* definida como $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}\,\mathrm{e}^{-x}\, dx$ es convergente cuando $p > 0$. Comprobar además que cuando $p = n \in \mathbf{N}$, se tiene $\Gamma(n) = (n-1)!$ (*Sugerencia*: si ya hizo el ejercicio §139z, úselo aquí).

165. En este ejercicio se pretende dar una poderosa herramienta para verificar la convergencia o divergencia (más no para calcular) de integrales infinitas, llamada *criterio de convergencia*:

Teorema 8.2. Sean f, g integrables en el intervalo $[a, \infty)$ tales que $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a, \infty)$. Entonces:

(a) si $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ converge, $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ converge;

(b) si $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ diverge, $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ diverge.

Usando este teorema, determinar el carácter de las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^2}^\infty \frac{dx}{x \operatorname{lgn}\operatorname{lgn} x}$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$ (g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{lgn}\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}\, dx$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{13}\, dx}{(x^5+x^3+1)^3}$ (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1}$ (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{\operatorname{sen}\pi x}-1}\, dx$

166. Marcar la alternativa correcta en cada una de las siguientes preguntas:

(I) El valor de $\displaystyle\int_1^0 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ es:

a. 0 b. $\pi/4$ c. $\pi/2$ d. $-\pi/4$ e. No existe

(II) Sean $I_1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2}$ e $I_2 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$. Entonces se puede afirmar que:

a. I_1 e I_2 convergen c. I_1 diverge e I_2 converge a 0 e. I_1 e I_2 divergen a ∞

b. $I_1 = 1$, $I_2 \to \infty$ d. I_1 converge a 0 e I_2 diverge

(III) Sean $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{lgn}\operatorname{sen} x\, dx$ y $J = \displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{lgn}\operatorname{sen} x\, dx$. Mediante la sustitución $x = \pi - u$ se obtiene:

a. $I=\pi J$ b. $I=2J$ c. $I<J$ d. $I=J$ e. $2I=J$

(IV) Sea a tal que $\operatorname{senh} a = 1$. Al evaluar la integral $K=\displaystyle\int_0^a \frac{\operatorname{senh}^2 x\cosh x}{\sqrt{1-\operatorname{senh}^2 x}}\,dx$ se obtiene que:

a. $K=-\pi$ b. $K=\pi/4$ c. $K=\pi/2$ d. $K=1/2$ e. No existe

(V) La integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+\cos x}{x^4}\,dx$:

a. Converge a 2
b. Converge a un número $\le 2/3$
c. Diverge
d. Converge a un número ≤ 1
e. Converge a $\le 1/2$

(VI) Sea f continua en $[0,\infty)$ tal que $0\le f(x)\le \pi$ para todo x en dicho intervalo. Entonces la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}}\,dx$:

a. Diverge a ∞
b. Converge a π
c. Converge a un número $\le \pi/2$
d. Converge a e^2
e. Converge a un número $\le 1/2$

9 Respuestas a ejercicios selectos

(1.a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2$ (1.b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{11}\frac{(-1)^k k}{k+1}$ (1.c) $\displaystyle\sum_{p \text{ primos}} a_p$ (1.d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ (1.e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\cos^{(-1)^k}\left(x+\frac{\pi}{2^k}\right)$

(1.f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}\sqrt[2k+1]{\frac{a^{f(k)}+\operatorname{sen}(k\pi/2)}{k!}}$, donde $f(k)=k^{(-1)^k}$ (2.b) $\dfrac{76}{105}$ (2.d) $a_{n+1}-a_1$ (2.e) $2\displaystyle\sum_{k=1}^{60}k^2=147.620$

(2.f) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (3.a) 20 (3.b) $\dfrac{20}{21}$ (3.c) $11-3\sqrt{11}-\sqrt{2}$ (3.d) $24.07\approx 2\left(\sqrt{170}-1\right)<\displaystyle\sum_{k=1}^{169}\frac{1}{\sqrt{k}}<26$

(5.c.vi) Para $n=1$ es cierta, ya que $\forall\, x$ se cumple $1+x=1+x$. Además:

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)^n(1+x)\overset{hip}{\ge}(1+nx)(1+x)=1+(n+1)x+nx^2\ge 1+(n+1)x\ ,\quad \forall\, x\ge 0\ .$$

(8) (a,c,e) No; (b,d,f) Si. (12) (a,d) No; (b,c) Si. (13.e) No. (14.a) $v_0T+g\dfrac{T^2}{2}$ (14.b) $\dfrac{n(n-1)}{2}$ (14.c) $\dfrac{3}{4}$ (14.d) 1

(14.e) $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$ (14.f) $2\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)$ (16.a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$ (16.b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p=\int_0^1 x^p\,dx=\frac{1}{p+1}$, $p\ne -1$

(16.c) $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx=\frac{8}{3}$ (16.d) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$ (16.e) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\left(2^{3/2}-1\right)$ (16.f) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$ (16.f) $\displaystyle\int_0^5\frac{dx}{1+x}$

(20.a) $I_1=\dfrac{1}{4}\arcsen\dfrac{1}{4}$; $I_2=\dfrac{\pi}{2}$ (20.b) $I_1=\dfrac{\pi}{4}$ (20.c) $I=\dfrac{\pi^2}{4}$ (20.d) $I=\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{50}+\dfrac{1}{101}$ (20.e) $I=J=\dfrac{\pi}{4}$ (21.d) $\dfrac{\pi}{16}$

(21.h) $4\sqrt{5}-2\sqrt{2}+2$ (21.l) $\dfrac{a}{4}$ (21.p) $\dfrac{7\pi}{12}$ (23.a) $I'(x)=3x^2\operatorname{sen}x^3-2x\operatorname{sen}x^2$ (23.b) $I'(x)=\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^2\left(\int_0^x\frac{dt}{\arcsen t}\right)}\dfrac{1}{\arcsen x}$

(23.c) $I'(x)=2\left[\tan x|\tan x|\sec^2 x\operatorname{sen}\left(\tan^2 x\right)-x|x|\operatorname{sen}x^2\right]$ (23.d) $y'=\dfrac{y-1-\cos x}{\operatorname{sen}y-1-x}$ (23.e) $I'(x)=2x\cos x+2\displaystyle\int_0^x\cos t\,dt$

(23.f) 9 (25) $f(x)=\dfrac{1}{2}\arctan\operatorname{sen}x$ (26) $p(x)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{2}+3$ (27.b) $k=\dfrac{3}{2}$ (30.b) $f(x)=3x^2$, $c=-3^{2/3}$

(30.d) $f(x)=2x^{15}$, $c=-\dfrac{1}{9}$ (31.b) $f(2)=\sqrt[3]{24}$ (31.d) $f(2)=\dfrac{1}{5}$ (32) $f''(1)=2$, $f'''(1)=5$ (34.c) $I\le\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

(39) I-a; II-a; III-d; IV-a; V-b; VI-e; VII-c; VIII-c; IX-e; X-c (40.a) $\dfrac{32}{3}$ (40.b) $\dfrac{1}{2}$ (40.c) 12

(40.d) $\displaystyle\int_{-10/3}^{1}\left(\frac{10-x}{3}-x^2-2x\right)dx-\int_{-3/2}^{0}\left(\frac{x}{2}-x^2-2x\right)dx$ (40.e) $\dfrac{37}{2}$ (40.f) $\dfrac{5}{2}$ (40.g) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{\pi}$ (40.h) $\dfrac{9}{64}$ (40.i) $\dfrac{37}{12}$

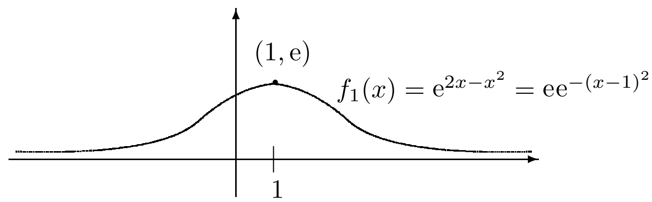
(40.j) $3\sqrt{3}$ (40.k) $5\pi-3\sqrt{3}$ (40.l) $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}+\dfrac{7}{6}$ (40.m) $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{3}$ (40.n) $\dfrac{4a^2}{3}$ (40.o) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{\pi}$ (40.p) $\dfrac{37}{12}$ (41) $c=2\sqrt[3]{2}$

(42) $A=\left(\displaystyle\int_0^a-\int_a^{a+b}\right)\dfrac{f(x)-g(x)}{2}\,dx-\pi(b-a)^2$ (43.a) $2\displaystyle\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\sqrt{2}\operatorname{sen}(x+\pi/4)\,dx=4\sqrt{2}$ (43.b) 0 (43.c) $\dfrac{4}{21}$ (43.d) 64

(45.a) $\frac{3}{2}-\sqrt{2}$ (46.a) $\frac{32\pi}{3}$ (46.b) $\frac{72\pi}{5}$ (46.c) 54π (46.d) 16π (51) $\frac{2}{3}\pi R^2 H$ (56) $\frac{4}{3}R^2 H$ (58.d) $\log_3 27=3$ (58.g) $3^{-4}=\frac{1}{81}$ (59.j) $\frac{1}{2}$ (63.d) $x_1=16,\ x_2=\sqrt[4]{2}$ (63.o) $x_1=2,\ x_2=\frac{1}{16}$ (64.d) $\pi-\log_2 9<1+\log(1+\sqrt{2})$ (65.a) $x\in[0,1/2]$ (65.m) $x\in(0,1/8)\cup(1,2)$ (67.b) $x\in[1,2]$ (67.f) $x\in(k\pi,(k+1/2)\pi),\ k\in\mathbf{Z}$ (67.j) No(68) La fórmula para $f_1(x)$ se puede escribir como

$$f_1(x)=(\mathrm{e}^x)^{2-x}=\mathrm{e}^{2x-x^2}=\mathrm{e}^{1-1+2x-x^2}=\mathrm{e}^1\,\mathrm{e}^{-(1-2x+x^2)}=\mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-(x-1)^2}\ ,$$

de modo que su gráfica (la cual se muestra en la figura adjunta) sale de aplicarle las transformaciones $T^H_{(\ )-1}$ y $T^V_{\mathrm{e}(\ )}$ a la campana de Gauss:



(69.e) $\log_a \mathrm{e}$ (70.b) $\frac{\alpha-\beta}{a-b}$ (70.f) $a^a(\operatorname{lgn} a-1)$ (70.l) $\operatorname{lgn}^2 a$ (71.a) $\operatorname{lgn}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ (71.g) $\mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen} bx$ (72.e) $\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}$

(80) $a=4$, $b=-1$ y $c=1$ (82) -1 (86.b) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{1}{2^k}=\frac{1}{x}-\operatorname{ctg} x+\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{1}{2^n}$ (88.b) $y=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}$ (92.b) $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x+1}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+1}$

(98) $a=\mathrm{e}$ (100) $(f^{-1})'(\mathrm{e})=\frac{x_0}{\operatorname{sen}\operatorname{lgn}^2 x_0},\ x_0=f^{-1}(\mathrm{e})$ (101) $f(x)=\begin{cases} x\ , & x\in(-\infty,0] \\ \mathrm{e}^x-1\ , & x\in(0,\infty)\end{cases}$ (102.d) $\arctan \mathrm{e}^x$

(102.f) $\mathrm{e}^x+\operatorname{lgn}(1+\mathrm{e}^x)$ (102.j) $\frac{\arctan x^2}{2}-\frac{\operatorname{lgn}(1+x^4)}{4}$ (102.q) $\mathrm{e}^{\arctan x}+\frac{1}{4}\operatorname{lgn}^2(1+x^2)+\arctan x$ (102.t) $\operatorname{lgn}(n!)$

(104) $\frac{160\pi}{9\operatorname{lgn}3}$ (105) $\frac{\mathrm{e}}{2\pi}$ (111) $-\frac{1}{4}$ (112.b) $\frac{2}{9}$ (112.e) No existe (113.b) $\mathrm{e}^{ax}\operatorname{senh} x$ (113.e) $-\operatorname{csch}^2 x$ (115.b) $-\frac{1}{3\cosh^3 x}+C$

(115.d) $\operatorname{lgn}|x+\operatorname{senh} x\cosh x|+C$ (116.a) $\pi\left(\frac{\operatorname{lgn}2}{2}+\frac{63}{32}\right)$ (117) I-c; II-a; III-c; IV-d; V-b; VI-a (118.b) $\operatorname{lgn}|x|-\frac{1}{4x^4}$

(118.f) $\operatorname{lgn}(x^2+9)-\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}$ (118.i) $-\frac{1}{2}\operatorname{lgn}\cos(x^2+1)$ (118.m) $\frac{1}{8}\operatorname{lgn}(1+4x^2)-\frac{1}{3}\sqrt{\arctan^3 2x}$

(118.t) $\frac{1}{99(1-x)^{99}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{97(1-x)^{97}}$ (118.v) $-\frac{1}{2\,\mathrm{e}^x(\cos x+\operatorname{sen} x)}$ (118.y) $\frac{\pi}{2}x$

(119.a) $-2\left(\sqrt[4]{5-x}-1\right)^2-4\operatorname{lgn}\left(1+\sqrt[4]{5-x}\right)$

$$(119.c)\ \frac{6x\sqrt[6]{x}}{7}-\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}-\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-3\operatorname{lgn}\left|1+\sqrt[3]{x}\right|+6\arctan\sqrt[6]{x}$$

(119.e) $\frac{1}{3}\operatorname{lgn}\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+\frac{2z}{z^3-1}$, donde $z=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ (119.f) $-\frac{4\sqrt[4]{x}+2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}$ (120.a) $\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}$

(120.b) $\frac{3}{2}\operatorname{lgn}(x^2-4x+5)+4\arctan(x-2)$ (120.c) $x-\frac{5}{2}\operatorname{lgn}(x^2+3x+4)+\frac{9}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt{7}}$

(120.e) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{lgn}\left|\frac{x^2-1-\sqrt{2}}{x^2-1+\sqrt{2}}\right|$ (120.f) $\frac{1}{9}\operatorname{lgn}\left[\left|x^3+1\right|\left(x^3-2\right)^2\right]$

(120.g) $\frac{1}{2}\operatorname{lgn}\left(x^2-2x\cos\alpha+1\right)+\operatorname{ctg}\alpha\arctan\frac{x-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$, $\alpha\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$ (120.l) $-2\sqrt{1-x-x^2}-9\arcsen\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$

(120.m) $\frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1}+\frac{1}{2}\left|x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2-1}\right|$ (120.n) $-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+\frac{3}{4}\arcsen\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}$

(120.p) $-\operatorname{lgn}\left(2+\cos x+\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}\right)$ (120.q) $-\sqrt{1-4\operatorname{lgn} x-\operatorname{lgn}^2 x}-\frac{2}{\sqrt{5}}\arcsen\frac{2+\operatorname{lgn} x}{\sqrt{5}}$

(121.b) $\frac{1}{6}\operatorname{lgn}\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{|x+2|}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\arcsen\frac{x+5}{\sqrt{2}(x+2)}$ (121.d) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{lgn}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{|x-1|}\right)$

(122.b) $-\frac{8+4x^2-3x^4}{15}\sqrt{1-x^2}$ (122.f) $\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{14}{3}x+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\operatorname{lgn}\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|$

(123.c) $\frac{1}{2}\operatorname{lgn}^2\tan x$ (123.f) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{lgn}|(\sec x+\tan x)(\csc x-\operatorname{ctg} x)|$ (123.j) $-\operatorname{ctg} x-\frac{2\sqrt{\operatorname{ctg}^3 x}}{3}$

(124.l) $-\frac{3x^2}{2}-3x-\frac{\operatorname{sen}(2x^2+4x)}{2}-\frac{\operatorname{sen}(4x^2+8x)}{8}-\frac{\operatorname{ctg}(2x^2+4x)}{2}-\frac{\csc(2x^2+4x)}{2}$ (125.f) $\operatorname{lgn}|\tan x|-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x$

(125.m) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\tan^5 x}+\frac{3}{11}\sqrt[3]{\tan^{11} x}$ (126.a) $-\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsen\frac{x}{3}$ (126.b) $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$ (126.f) $\left\{\begin{array}{c} 2\arcsen\sqrt{x}+C_1 \\ \arcsen(2x-1)+C_2\end{array}\right.$

(126.k) $\dfrac{2x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$ (126.n) $\dfrac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\dfrac{11}{8}\operatorname{arcsen}\dfrac{1-2x}{\sqrt{5}}$

(127.c) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{\operatorname{sen}2ax}{8a}+\dfrac{\operatorname{sen}2bx}{8b}+\dfrac{\operatorname{sen}2(a-b)x}{16(a-b)}+\dfrac{\operatorname{sen}2(a+b)x}{16(a+b)}$ (128.c) $-x+\tan x+\sec x$ (128.e) $\operatorname{lgn}\left|\dfrac{\tan(x/2)-5}{\tan(x/2)-3}\right|$

(128.f) $\arctan\left(1+\tan\dfrac{x}{2}\right)$ (128.h) $-x+2\operatorname{lgn}\left|\dfrac{\tan(x/2)}{\tan(x/2)+1}\right|$ (128.i) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{lgn}\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{b}{a}\right)\right|$

(129.a) $-\dfrac{x}{5}-\dfrac{3}{5}\operatorname{lgn}|\operatorname{sen}x+2\cos x|$ (129.b) $\dfrac{x}{10}+\dfrac{3}{10}\operatorname{lgn}|\operatorname{sen}x-3\cos x|$ (129.f) $\dfrac{3x}{34}+\dfrac{5}{34}\operatorname{lgn}|5\operatorname{sen}x+3\cos x|$

(129.a) $-\dfrac{3x}{5}+\dfrac{4}{5}\operatorname{lgn}|\operatorname{sen}x-2\cos x+3|-\dfrac{6}{5}\arctan\dfrac{5\tan(x/2)+1}{2}$ (130.b) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)-\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}|\sqrt{2}+\operatorname{sen}x+\cos x|$

(131) No. (132.c) $\dfrac{1}{2}\left(\tan x\sec x-\operatorname{lgn}|\sec x+\tan x|\right)$ (134) $I=\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}\left[x\left(\operatorname{sen}x-\cos x\right)+\cos x\right]$

(135.c) $\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}-3x\right)\operatorname{lgn}^2 x-\left(\dfrac{x^3}{6}-x^2-3x\right)\operatorname{lgn}x+\dfrac{x^4}{96}-\dfrac{x^3}{9}-\dfrac{3x^2}{2}$

(137.b) $x(\operatorname{lgn}x-1)\operatorname{lgn}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\sqrt{x^2+1}(2-\operatorname{lgn}|x|)+\operatorname{lgn}\dfrac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}$ (138.b) $(x^2+2)\,\mathrm{e}^x$

(138.e) $\mathrm{e}^{ax}\left(\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a\cos 2bx+2b\operatorname{sen}2bx}{2(a^2+4b^2)}\right)$ (138.h) $\dfrac{(x^2+4)^4}{32}\left(4\operatorname{lgn}(x^2+4)-1\right)$

(139.b) $\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{3}{4}x^2+3x^2\cos x-x(6\operatorname{sen}x+\dfrac{3}{4}\operatorname{sen}2x)-(5\cos x+\dfrac{3}{8}\cos 2x)-\dfrac{1}{3}\cos^3 x$ (139.d) $(1+x)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}$

(139.g) $x\operatorname{arcsen}^2 x+2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}x-2x$ (139.m) $-\dfrac{\operatorname{lgn}^2 x+2\operatorname{lgn}x+2}{x}$ (139.p) $\dfrac{x}{2}\left(\operatorname{sen}\operatorname{lgn}x-\cos\operatorname{lgn}x\right)$

(139.q) $x\operatorname{lgn}\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen}x$ (139.r) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\operatorname{sen}2x-\mathrm{e}^x(\cos x+\operatorname{sen}x)+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$

(140.c.iii) $\dfrac{x^2-2}{2}\arctan(2x+3)+\quad+\dfrac{3}{8}\operatorname{lgn}(2x^2+6x+5)$ (140.c.v) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\operatorname{arcsen}\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$ (142.a) $\dfrac{x\operatorname{sen}x+\cos x}{x\cos x-\operatorname{sen}x}$

(142.c) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1}$ (142.e) $\mathrm{e}^{\operatorname{sen}x}\left(x-\sec x\right)$ (143.g) $\mathrm{e}^{2x}\,\dfrac{4x^3-6x^2+6x-3}{8}$ (144) $4\pi\dfrac{\pi+6-3\sqrt{3}}{6}$ (145.d) $\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}\dfrac{(x+2)^4}{|(x+1)(x+3)^3|}$

(145.i) $\operatorname{lgn}|x|-\dfrac{2}{7}\operatorname{lgn}|1+x^7|$ (145.k) $4\operatorname{lgn}\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|-\dfrac{5x-6}{x^2-3x+2}$ (145.m) $\dfrac{x^2+1}{x}+\operatorname{lgn}\dfrac{(x-1)^2}{|x|}$

(145.t) $\dfrac{1}{8}\operatorname{lgn}\dfrac{|x^2-1|}{x^2+1}-\dfrac{\arctan x^2}{4}$ (145.ϵ) $-\dfrac{1}{10}\left[\dfrac{x^5+2}{x^{10}+2x^5+2}+\arctan(x^5+1)\right]$

(145.θ) $I_3=\arctan x+\dfrac{2x-1}{2x^2}+\dfrac{1}{2}\operatorname{lgn}(1+x^2)$ (145.μ) $\dfrac{3}{8}\arctan x-\dfrac{3}{16}\operatorname{lgn}\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|-\dfrac{x}{4(x^4-1)}$

(145.π) $\dfrac{-3+5x^2-15x^4}{15x^5}-\arctan x$ (146.h) $\dfrac{1}{ab}\arctan\dfrac{a\tan x}{b}$ (146.l) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (146.p) $\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$

(146.r) $\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$ (148.b) $I_2=\dfrac{A}{2}$ (148.d) $I_4=\mathrm{e}\operatorname{lgn}2-A$

"Lo que que tenemos que aprender a hacer, lo aprendemos haciéndolo"
Aristóteles, *Ethica Nicomachea* II (s. 325 A.C.)

Typseted in LaTeX.